

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**RESPUESTA NO LINEAL DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO  
BAJO CARGAS CUASI-ESTÁTICAS**

**POR**

**ING. FELIX CERVANTES GUERRERO**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN INGENIERÍA  
ESTRUCTURAL**

**AGOSTO, 2018**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**RESPUESTA NO LINEAL DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO  
BAJO CARGAS CUASI-ESTÁTICAS**

**POR**

**ING. FELIX CERVANTES GUERRERO**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN INGENIERÍA  
ESTRUCTURAL**

**AGOSTO, 2018**

# **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL.**

### **SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

Los miembros del comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Respuesta No Lineal de Vigas de Concreto Reforzado», realizada por el alumno Felix Cervantes Guerrero, con número de matrícula 1577284, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias con Orientación en Ingeniería Estructural.

El Comité de Tesis:

---

Dr. Jorge H. Chávez Gómez.  
Director de Tesis

---

Dr. Ricardo González Alcorta  
Asesor externo

---

Dr. Cesar Antonio Juarez Alvarado  
Revisor interno

Vo. Bo.

---

Dr. Cesar Antonio Juarez Alvarado  
Subdirección de Estudios de Posgrado.

San Nicolás de los Garza, Nuevo León.

Agosto 2018

---

*Como un homenaje a mi padre, se*

*Que estas orgulloso de mí.*

# ÍNDICE DE CONTENIDO.

---

ÍNDICE DE CONTENIDO. ....	i
ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
CAPÍTULO 1. ....	1
INTRODUCCIÓN. ....	1
1.1. GENERALIDADES.....	1
1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA .....	4
1.3. HIPÓTESIS.....	7
1.4. OBJETIVOS.....	7
1.4.1. OBJETIVO GENERAL. ....	7
1.4.2. OBJETIVOS PARTICULARES. ....	7
CAPÍTULO 2 .....	8
MARCO TEÓRICO .....	8
2.1. INTRODUCCIÓN .....	8
2.2. ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO. ....	12
2.2.1. DISEÑO POR ESFUERZOS DE TRABAJO (TEORÍA ELÁSTICA). ....	13
2.2.2. DISEÑO POR RESISTENCIA ÚLTIMA. ....	13
2.2.3. DISEÑO POR ESTADO DE SERVICIO.....	15
2.2.4. COMPORTAMIENTO EXPERIMENTAL DEL CONCRETO Y EL ACERO DE REFUERZO.....	15

<b>2.3.</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS DE LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS</b>	
	<b>MATERIALES. ....</b>	<b>19</b>
2.3.1.	MODELO DE JENSEN PARA CONCRETO SIMPLE. ....	20
2.3.2.	MODELO DE HOGNESTAD PARA CONCRETO SIMPLE. ....	20
2.3.3.	MODELO DE CARREIRA-CHU PARA CONCRETO SIMPLE. ....	21
2.3.4.	MODELO DE ACI-318 PARA EL ACERO DE REFUERZO. ....	22
2.3.5.	MODELO TRILINEAL DEL ACI-318 PARA EL ACERO DE REFUERZO. ....	23
2.3.6.	MODELO DE ACERO SIN MESETA DE CEDENCIA. ....	24
<b>2.4.</b>	<b>TEORÍA DE LAS VIGAS DE CONCRETO REFORZADO. ....</b>	<b>25</b>
2.4.1	INTRODUCCIÓN. ....	25
2.4.2	ARTICULACIONES PLÁSTICAS. ....	26
2.4.3	HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA TEORÍA DE LAS VIGAS DE CR A FLEXIÓN. ....	27
2.4.4	MODELO MATEMÁTICO. ....	28
<b>2.5.</b>	<b>RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA. ....</b>	<b>30</b>
2.5.1.	DEFINICIÓN DE MOMENTO-CURVATURA. ....	30
2.5.2.	MODELO ANALÍTICO PARA LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA. ....	33
2.5.3.	HIPÓTESIS PARA LA OBTENCIÓN DE LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA DE UNA SECCIÓN. ....	36
2.5.4.	PROCEDIMIENTO PARA GENERAR EL DIAGRAMA DE MOMENTO-CURVATURA. ....	37
<b>2.6.</b>	<b>CÁLCULO DE DEFLEXIONES ....</b>	<b>38</b>
2.6.1.	CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN CON EL MÉTODO DEL ACI. ....	38
2.6.2.	CÁLCULO DE DEFLEXIONES CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. ....	42
2.6.3.	CÁLCULO DE DEFLEXIONES CON OTROS MÉTODOS. ....	45
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>.....</b>	<b>48</b>

<b>METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE DEFLEXIONES EN VIGAS .....</b>	<b>48</b>
<b>3.1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>48</b>
<b>3.2. DEFINICIÓN DE LAS VIGAS PROTOTIPO. ....</b>	<b>50</b>
3.2.1. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA. ....	50
3.2.2. VIGAS CONTINUAS. ....	51
<b>3.3. DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MATERIALES. ....</b>	<b>53</b>
3.3.1. MODELO CONSTITUTIVO DEL CONCRETO. ....	53
3.3.2. MODELO CONSTITUTIVO DEL ACERO. ....	55
<b>3.4. CÁLCULO DE LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA DE LA SECCIÓN. ....</b>	<b>56</b>
3.4.1. CÁLCULO DE LA RELACIÓN $M-\phi$ . ....	56
3.4.2. RELACIÓN $M-\phi$ PARA VIGA DE UN CLARO. ....	59
3.4.3. RELACIÓN $M-\phi$ PARA LAS VIGAS CONTINUAS. ....	59
<b>3.5. RIGIDEZ A LA FLEXIÓN. ....</b>	<b>60</b>
<b>3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA MATEMÁTICO .....</b>	<b>62</b>
3.6.1. DISCRETIZACIÓN DE LA VIGA. ....	62
3.6.2. FUNCIONES DE FORMA .....	63
<b>3.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA VIGA. ....</b>	<b>64</b>
<b>3.8. MATRIZ DE FUERZAS DE LA VIGA. ....</b>	<b>66</b>
<b>3.9. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL DE EQUILIBRIO DE LA VIGA. ....</b>	<b>67</b>
<b>3.10. DIAGRAMA DE FLUJO DE LA METODOLOGÍA. ....</b>	<b>69</b>
<b>CAPÍTULO 4 .....</b>	<b>70</b>
<b>RESULTADOS .....</b>	<b>70</b>

<b>CAPÍTULO 5 .....</b>	<b>97</b>
<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>97</b>
5.1.1. RIGIDEZ A FLEXIÓN DE LA VIGA DE UN CLARO.....	99
5.1.2. RIGIDEZ A FLEXIÓN PARA VIGAS CONTINUAS .....	100
5.2.1. CURVATURAS PARA VIGA DE UN CLARO.....	104
5.2.2. CURVATURA PARA LAS VIGAS CONTINUAS.....	104
5.3.1. MOMENTOS FLEXIONANTES PARA VIGA DE UN CLARO.....	109
5.3.2. MOMENTOS FLEXIONANTES PARA VIGAS CONTINUAS. ....	110
5.4.1. DEFLEXIONES PARA VIGA DE UN CLARO. ....	113
5.4.2. DEFLEXIONES PARA VIGAS CONTINUAS. ....	114
<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>117</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>117</b>
6.1. CONCLUSIONES DE LA METODOLOGÍA. ....	117
6.2. CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS.....	120
6.3. RECOMENDACIONES. ....	121
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>123</b>
<b>GLOSARIO.....</b>	<b>128</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS.

---

<b>Figura 1.</b> Sistema coordinado de referencia. ....	5
<b>Figura 2.</b> Elementos mecánicos considerados.....	10
<b>Figura 3.</b> Formación de las grietas causadas por esfuerzos de corte.....	10
<b>Figura 4.</b> Curva $\sigma$ - $\epsilon$ del concreto en compresión, para peso volumétrico de 2300kg/m <sup>3</sup> . ....	16
<b>Figura 5.</b> Curva $\sigma$ - $\epsilon$ del concreto en tensión de pruebas experimentales, Carreira-Chu 1986 (Carreira & Chu, Stress-Strain relationship for Reinforced Concrete in Tension, 1986) . ....	18
<b>Figura 6.</b> Curvas típicas de $\sigma$ - $\epsilon$ para el acero de refuerzo. ....	19
<b>Figura 7.</b> Modelo de $\sigma$ - $\epsilon$ propuesto por Jensen. ....	20
<b>Figura 8.</b> Modelo de $\sigma$ - $\epsilon$ propuesto por Hognestad. ....	21
<b>Figura 9.</b> Diagrama de $\sigma$ - $\epsilon$ y su modelo matemático.....	22
<b>Figura 10</b> Diagrama EPP del acero a tensión. ....	22
<b>Figura 11.</b> Diagrama Trilineal del acero en tensión .....	23
<b>Figura 12.</b> Modelo $\sigma$ - $\epsilon$ del acero de refuerzo. ....	24
<b>Figura 13.</b> Relación $\sigma$ - $\epsilon$ de un material. ....	26
<b>Figura 14.</b> Articulaciones plásticas en vigas de concreto de acuerdo al análisis plástico. ....	27
<b>Figura 15.</b> Representación gráfica de la curvatura de una sección de viga de concreto. ....	30
<b>Figura 16.</b> Relación M- $\phi$ , a) sección ligeramente reforzada. b) sección fuertemente reforzada.....	32
<b>Figura 17.</b> Curva carga-deformación de miembros a flexión.....	32
<b>Figura 18.</b> Relación M- $\phi$ de modelos simplificados. ....	33
<b>Figura 19.</b> Información teórica de la relación M- $\phi$ , a) Concreto a compresión y tensión, b) acero en tensión y compresión, c) sección con deformación, esfuerzos y distribución de fuerzas. ....	34
<b>Figura 20.</b> Relación M- $\phi$ para vigas reforzadas a tensión. ....	35

<b>Figura 21.</b> Representación de los esfuerzos $\sigma_{xx}$ en una viga modelada con EF 3D.....	42
<b>Figura 22.</b> Propagación de las grietas (Gasser & Holzapfel, 2004). .....	43
<b>Figura 23.</b> Relaciones constitutivas del concreto y del acero utilizado por Jie-Jiang Zhu and Yang Lee. ....	45
<b>Figura 24.</b> Variación de la rigidez en el diagrama M- $\phi$ . .....	49
<b>Figura 25.</b> Prototipo de viga de un claro con refuerzo inferior. ....	50
<b>Figura 26.</b> Prototipos de vigas continuas (longitudes en cm). .....	51
<b>Figura 27.</b> Secciones transversales de las vigas de CR (el calibre de las varillas se lee en octavos de pulgada “#/8”). .....	52
<b>Figura 28.</b> Gráfica $\sigma - \varepsilon$ del modelo de Carreira-Chu para el concreto de $f'c=250\text{kgf/cm}^2$ . ....	54
<b>Figura 29.</b> Relación $\sigma$ - $\varepsilon$ del acero, $F_y=4218\text{kgf/cm}^2$ .....	55
<b>Figura 30.</b> Sección simétrica y distribución de deformaciones.....	57
<b>Figura 31.</b> Diagrama M- $\phi$ utilizando el modelo Carreira-Chu + acero del ACI.....	57
<b>Figura 32.</b> Diagrama M- $\phi$ ajustado sin ablandamiento por deformación.....	58
<b>Figura 33.</b> Diagrama M- $\phi$ elastoplástico para la viga de un claro. ....	59
<b>Figura 34.</b> Diagrama M- $\phi$ elastoplástico de la viga V1. ....	59
<b>Figura 35.</b> Diagramas M- $\phi$ elastoplásticas para vigas continuas.....	60
<b>Figura 36.</b> Diagrama de las pendientes para la viga VS-1. ....	60
<b>Figura 37.</b> Diagrama de las pendientes para las vigas continuas. ....	61
<b>Figura 38.</b> Discretización de la estructura.....	62
<b>Figura 39.</b> Gráfica de las funciones Hermitianas, donde a y b son los nodos extremos del elemento.....	64
<b>Figura 40.</b> Malla de N nodos y N-1 elementos y matriz de coeficientes en la que se ha representado la contribución de los elementos (Becker, Carey, & Oden, 1981) página 77.....	66
<b>Figura 41.</b> Diagrama de Rigidez a Flexión de una viga simplemente apoyada.....	68
<b>Figura 42.</b> Prototipo de viga de un claro, con carga uniformemente distribuida. ....	71
<b>Figura 43.</b> Gráficas de la viga VS-1, Tipo I $W_s = 3.72 \text{ kg/cm}$ . ....	72
<b>Figura 44.</b> Viga tipo II, con carga uniformemente distribuida.....	73

<b>Figura 45.</b> Gráficas de la viga V1, Tipo II Wu = 13.339 kg/cm. ....	74
<b>Figura 46.</b> Gráficas de la viga V2, Tipo II Wu = 19.617 kg/cm. ....	74
<b>Figura 47.</b> Gráficas de la viga V3, Tipo II Wu = 22.962 kg/cm. ....	75
<b>Figura 48.</b> Gráficas de la viga V4, Tipo II Wu = 31.665 kg/cm. ....	75
<b>Figura 49.</b> Gráficas de la viga V5, Tipo II Wu = 36.305 kg/cm. ....	76
<b>Figura 50.</b> Gráficas de la viga V6, Tipo II Wu = 46.5 kg/cm. ....	76
<b>Figura 51.</b> Gráficas de la viga V7, Tipo II Wu = 59.75 kg/cm. ....	77
<b>Figura 52.</b> Gráficas de la viga V8, Tipo II Wu = 74.29 kg/cm. ....	77
<b>Figura 53.</b> Gráficas de la viga V9, Tipo II Wu = 92.435 kg/cm. ....	78
<b>Figura 54.</b> Viga tipo III, carga uniformemente distribuida. ....	79
<b>Figura 55.</b> Gráficas de la viga V1, Tipo III Wu = 9.22 kg/cm. ....	80
<b>Figura 56.</b> Gráficas de la viga V2, Tipo III Wu = 13.575 kg/cm. ....	80
<b>Figura 57.</b> Gráficas de la viga V3, Tipo III Wu = 16.019 kg/cm. ....	81
<b>Figura 58.</b> Gráficas de la viga V4, Tipo III Wu = 21.9 kg/cm. ....	81
<b>Figura 59.</b> Gráficas de la viga V5, Tipo III Wu = 25.406 kg/cm. ....	82
<b>Figura 60.</b> Gráficas de la viga V6, Tipo III Wu = 32.41 kg/cm. ....	82
<b>Figura 61.</b> Gráficas de la viga V7, Tipo III Wu = 41.37 kg/cm. ....	83
<b>Figura 62.</b> Gráficas de la viga V8, Tipo III Wu = 51.11 kg/cm. ....	83
<b>Figura 63.</b> Gráficas de la viga V9, Tipo III Wu = 63.80 kg/cm. ....	84
<b>Figura 64.</b> Viga tipo IV, con carga uniformemente distribuida. ....	85
<b>Figura 65.</b> Gráficas de la viga V1, Tipo IV Wu = 13.306 kg/cm. ....	86
<b>Figura 66.</b> Gráficas de la viga V2, Tipo IV Wu = 19.54 kg/cm. ....	86
<b>Figura 67.</b> Gráficas de la viga V3, Tipo IV Wu = 23.03 kg/cm. ....	87
<b>Figura 68.</b> Gráficas de la viga V4, Tipo IV Wu = 31.59 kg/cm. ....	87
<b>Figura 69.</b> Gráficas de la viga V5, Tipo IV Wu = 36.15 kg/cm. ....	88
<b>Figura 70.</b> Gráficas de la viga V6, Tipo IV Wu = 46.56 kg/cm. ....	88

<b>Figura 71.</b> Gráficas de la viga V7, Tipo IV $W_u = 59.44 \text{ kg/cm}$ .	89
<b>Figura 72.</b> Gráficas de la viga V8, Tipo IV $W_u = 73.92 \text{ kg/cm}$ .	89
<b>Figura 73.</b> Gráficas de la viga V9, Tipo IV $W_u = 91.92 \text{ kg/cm}$ .	90
<b>Figura 74</b> Comparativa del Método del ACI vs Metodología con <b>RNLM</b> , para viga tipo I.	91
<b>Figura 75.</b> Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con RNLM, vigas tipo II.	93
<b>Figura 76.</b> Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con RNLM, vigas tipo III.	94
<b>Figura 77.</b> Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con RNLM, vigas tipo IV para claros de bode....	95
<b>Figura 78.</b> Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con RNLM, vigas tipo IV para claro central. ....	96
<b>Figura 79.</b> (a) relación $M-\phi$ de la sección de viga V2. (b) muestra las pendientes obtenidas del diagrama $M-\phi$ .	98
<b>Figura 80.</b> Grafica de la rigidez a flexión de la viga V-2, tipo II con diversos pasos de cargas.	101
<b>Figura 81.</b> Rigidez a flexión de la viga V2-Tipo II.	102
<b>Figura 82.</b> Rigidez a flexión de la viga V2, Tipo III.	102
<b>Figura 83.</b> Rigidez a flexión de la viga V2, Tipo IV.	103
<b>Figura 84.</b> Diagramas de curvaturas para la viga VS-1.	104
<b>Figura 85. a)</b> Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo II, b) diagrama de curvaturas completo.	105
<b>Figura 86. a)</b> Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo III, b) diagrama de curvaturas completo.	106
<b>Figura 87. a)</b> Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo IV, b) diagrama de curvaturas completo.	107
<b>Figura 88.</b> Diagramas de curvaturas en diferentes etapas de cargas.	108
<b>Figura 89.</b> Diagramas de MF para la viga VS-1, Tipo I.	110
<b>Figura 90.</b> Diagramas de MF de la viga V2, Tipo II.	111
<b>Figura 91.</b> Diagramas de MF de la viga V2, Tipo III.	111
<b>Figura 92.</b> Diagramas de MF de la viga V2, Tipo IV.	112
<b>Figura 93. a)</b> Diagramas de Deflexiones para VS-1, b) comparativa entre el metodo del ACI y MEF con RNLM.	113
<b>Figura 94.</b> Diagramas de Deflexiones para V2, tipo II.	115

<b>Figura 95.</b> Diagramas de Deflexiones para V2, tipo II (con falla).....	115
<b>Figura 96.</b> Diagramas de Deflexiones para V2, tipo III.....	116
<b>Figura 97.</b> Diagramas de Deflexiones para V2, tipo IV.....	116

## **AGRADECIMIENTOS**

Esta investigación fue posible gracias al apoyo de muchas personas e instituciones al cual agradezco arduamente:

A la Universidad Autónoma de Nuevo León. Por permitirme ser parte de esta prestigiada institución.

A la Facultad de Ingeniería Civil. Por transmitir el conocimiento por medio de los académicos que colaboran en esta gran casa de estudio.

Al Instituto De Ingeniería Civil. Por proporcionarme el tiempo para colaborar en los diferentes proyectos realizados.

Al Dr. Jorge H. Chávez Gómez. Mi más sincero agradecimiento y reconocimiento por la gran labor realizado al invertir tiempo y sobre todo, al compartir sus conocimientos que han sido muy valiosos para terminar ésta investigación.

Al Dr. Ricardo González Alcorta por su gran amistad y por invitarme a realizar mis estudios de maestría en esta institución.

Al Dr. Pedro L. Valdez Tamez. Por el apoyo durante su administración como director de posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil.

A mis colegas y amigos por el apoyo incondicional, sus motivaciones fueron de gran ayuda.

A mi Esposa por su apoyo moral y por comprenderme en todo momento.

A mi madre y a mis hermanos que siempre están al pendiente de mí, en general a toda mi familia.

A mi Dios, que por su gracia inmerecida me ha regalado la mejor experiencia que es vivir en este mundo.

## **RESUMEN**

Felix Cervantes Guerrero

Candidato para el Grado de Maestro en Ciencias

Con especialidad en Ingeniería Estructural.

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**

Título del estudio:

### **RESPUESTA NO LINEAL DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO BAJO CARGAS CUASI-ESTÁTICAS.**

En esta investigación se realiza una metodología para el cálculo de las deflexiones en vigas continuas de concreto reforzado sometidas a cargas de servicio y cargas últimas. Dicha metodología depende básicamente de la información proporcionada referente a la sección transversal de la viga, en la que destaca principalmente la relación momento vs curvatura (**M- $\phi$** ). Usando esta información, se modela el comportamiento no lineal de los materiales con el propósito de obtener una mejor aproximación al comportamiento a flexión de las vigas. El modelo matemático se resuelve mediante el Método del Elemento Finito



(MEF) aplicado a barras rectas prismáticas. Las funciones de formas utilizadas en esta formulación son las funciones denominadas “Hermitianas”. Se realiza una correlación entre las deflexiones obtenidas por el método de Branson para vigas con dos claros y las deflexiones obtenidas mediante el MEF.

En el Capítulo 1, se presenta una breve introducción, objetivos e hipótesis con la que se inicia el desarrollo de la metodología.

En el Capítulo 2, se presenta el estado del arte referente al cálculo de los desplazamientos transversales (**deflexiones**), además, se presentan las bases de la teoría en flexión de vigas de concreto reforzado.

En el Capítulo 3, se presenta el desarrollo analítico para implementar una metodología que sea capaz de calcular deflexiones inmediatas utilizando la relación momento-curvatura de las secciones de las vigas, para incluir la no linealidad de los materiales. Para resolver éste problema matemático, se recurre al MEF para calcular la solución aproximada

El Capítulo 4 contiene los resultados de las simulaciones numéricas generadas en esta investigación, se realiza una comparativa con el método de Branson contenida en las recomendaciones de diseño del American Concrete Institute (ACI).

El Capítulo 5 presenta un análisis de los resultados obtenidos.

El Capítulo 6 presenta las conclusiones y recomendaciones derivadas del estudio comparativo.

**Contribuciones y Conclusiones:** El empleo de la relación momento vs curvatura para el cálculo de las deflexiones en vigas continuas de concreto reforzado, permite incluir la no linealidad del material con el propósito de obtener resultados más representativos de la realidad física. Por lo que es muy importante tener los modelos analíticos de las relaciones constitutivas, que hayan sido verificados con resultados obtenidos de pruebas estandarizadas en laboratorio.

Firma del asesor interno:

---

Dr. Jorge H. Chávez Gómez.

Firma del asesor externo:

Firma del asesor interno:

---

Dr. Ricardo González Alcorta.

---

Dr. Cesar Antonio Juarez Alvarado

# **CAPÍTULO 1.**

## **INTRODUCCIÓN.**

---

### **1.1. GENERALIDADES**

En la ingeniería estructural se conoce que todas las estructuras estarán, eventualmente, expuestas a eventos naturales y los generados por la actividad humana, los cuales inducirán demandas estructurales máximas. Los sismos son eventos naturales con gran potencial para producir daños en las estructuras, debido a los movimientos vibratorios del terreno que las soporta. Estos movimientos del terreno se miden comúnmente en términos de las aceleraciones o desplazamientos del mismo. Estas acciones pueden provocar ruptura del terreno (deslizamientos de taludes, licuefacción, asentamientos y fallas superficiales), capaces de causar daños estructurales y pérdidas de vidas humanas en un intervalo corto de tiempo.

Las pérdidas materiales y humanas registradas durante la acción de los sismos moderados o fuertes son causadas en gran parte por el colapso total o parcial de obras de ingeniería, principalmente edificios. Sin embargo, en los otros casos, donde las estructuras no se colapsaron, éstas pueden haber sufrido daños no estructurales que las inhabilitan durante un tiempo, generando cuantiosas pérdidas económicas y trastornos para las ciudades, e.g., hospitales, centrales

telefónicas, acueductos, etc. Gran parte de México se encuentra en una región de gran actividad sísmica. Se han registrado una gran cantidad de eventos sísmicos importantes y se espera que esto siga ocurriendo en el futuro cercano. Pese a esta amenaza latente, los ingenieros están obligados a diseñar mejores estructuras que estén preparadas para resistir diversas solicitaciones sísmicas durante su vida útil.

En las zonas de mayor sismicidad, cuando el máximo evento sísmico de diseño ocurre, se espera que los edificios desarrollen comportamiento dúctil mediante la plastificación del material, concentrada en algunas zonas de las vigas. Los códigos de diseño proveen un conjunto de requerimientos para alcanzar esta filosofía de diseño (ACI315R-04, 2004) y (NTC2004-DF, 2004). Esta postula que el comportamiento dúctil de algunas zonas de los edificios permite disipar energía cinética mediante un mecanismo de plastificación del material (deformación plástica permanente). Es así como los edificios están mejor preparados para absorber y disipar grandes cantidades de energía cinética inducidas por el movimiento del terreno durante el evento sísmico.

Hasta hace pocos años (aproximadamente en la década de los 70's), las técnicas de análisis estructural de edificios asumían un comportamiento elástico lineal de los materiales, para la predicción de su respuesta ante eventos sísmicos. Desafortunadamente, estas predicciones no son correctas ya que los materiales usados, tales como el concreto y el acero, no presentan este tipo de comportamiento para el rango de deformaciones requeridas (FEMA400 Department of Homeland Security's Federal Emergency Management Agency, junio 2005).

Durante las últimas décadas, la práctica profesional de la ingeniería estructural ha ido evolucionando a pasos acelerados. Sin embargo, ante la necesidad práctica de resolver los problemas cotidianos de manera rápida en los bufetes de ingeniería, se han propuesto técnicas de solución simplificadas, sacrificando la consistencia teórica mediante la introducción de aproximaciones matemáticas.

Con el avance de la tecnología, las computadoras han tenido una gran participación en el desarrollo de nuevos métodos de análisis en el campo de la ingeniería estructural. Las capacidades de las computadoras actuales superan grandemente a las disponibles en décadas pasadas, por otro lado, los softwares (programas de computadora) también han evolucionado sustancialmente teniendo así un ambiente gráfico interactivo más confiable y amigable para el ingeniero analista (usuario) e internamente se ha logrado implementar métodos numéricos más avanzados.

Anteriormente, los modelos matemáticos elástico-lineales habían sido la principal herramienta para la simulación numérica del comportamiento de las estructuras sometidas a la acción de sismos. En la actualidad, los investigadores están utilizando modelos matemáticos que consideran la no linealidad de los materiales y la geometría, para así obtener resultados más realistas y consistentes desde el punto de vista teórico.

Los modelos lineales han sido sustituidos por modelos no lineales que incorporan relaciones constitutivas más cercanas a la realidad física observada en

diversos experimentos de laboratorio. El motivo por el cual se pueden plantear estos modelos es, en gran parte, debido a la aplicación de algoritmos numéricos más desarrollados como es el caso del MEF, el cual es el más popular de los métodos numéricos existentes en la literatura para el cálculo de estructuras (Gil Espert, Oñate, & Bugeda, 1996) y que ha sido implementado en programas de cómputo para las computadoras modernas disponibles actualmente.

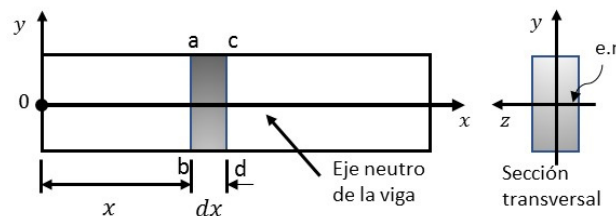
## **1.2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

Las vigas de concreto reforzado son elementos estructurales muy utilizados para soportar cargas y darles estabilidad a las estructuras. Para el diseño de estas estructuras, se deben tener definidos los parámetros necesarios para su dimensionamiento adecuado. Se revisan los diferentes estados límite de falla, tal como ordena el código de construcción de elementos de concreto reforzado. El estado límite de falla por resistencia es crucial, sin embargo, también debe revisarse (entre otros) el estado límite de falla por servicio en deflexiones. En este último, debe considerarse la no linealidad de la relación esfuerzo-deformación unitario de los materiales que componen la viga.

Para el cálculo de las deflexiones, es necesario utilizar una metodología que involucre las variables más relevantes en su cálculo. Esta metodología debe considerar las relaciones constitutivas de los materiales, mediante modelos que se aproximen tanto como sea práctico a las relaciones obtenidas experimentalmente en laboratorio, bajo condiciones controladas. Esto con el propósito de mejorar su

confiabilidad al predecir la respuesta ante cargas de las vigas. Sin embargo, las dificultades matemáticas que se involucran en la elaboración de las relaciones constitutivas nos obligan a simplificarlas.

De acuerdo a la hipótesis de Bernoulli-Euler para las vigas en flexión, la ecuación diferencial ordinaria (EDO), ecuación 1, es el modelo matemático para simular el comportamiento de la viga, bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños y comportamiento elástico lineal de los materiales.



**Figura 1.** Sistema coordenado de referencia.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) = \frac{M(x)}{EI}, \text{ en el dominio de las } x: 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

Más dos condiciones de frontera

Dónde:

$x$  = ubicación de una sección transversal a lo largo del eje longitudinal de la viga.

$y(x)$  = desplazamiento transversal del eje centroidal de la viga, normal a  $x$ .

$f(x)$  = curvatura del eje longitudinal de la viga en la sección a la distancia  $x$ .

$M(x)$  = momento flexionante en la sección ubicada a la distancia  $x$ .

$EI$  = rigidez a la curvatura de la sección.

En esta investigación se pretende encontrar una solución aproximada a la EDO de segundo orden (ecuación 1). La función solución,  $y(x)$ , cuantifica los desplazamientos transversales de la viga

Desafortunadamente, la hipótesis de los desplazamientos pequeños no se cumple satisfactoriamente en las estructuras que nos interesa diseñar, especialmente en regiones sísmicas donde queremos que se desarrollen grandes deformaciones (en el rango no lineal de los materiales), con el propósito de disipar energía cinética, inducida por la acción de los sismos.

En las vigas isostáticas es posible calcular la función de momento flexionante mediante las leyes de la estática. Es decir, no se necesita involucrar las relaciones constitutivas de los materiales. De esta manera es posible calcular la curvatura en una sección ubicada a la distancia  $x$ , utilizando la relación momento-curvatura de la sección. Con esta información es posible resolver la EDO fácilmente, utilizando técnicas numéricas. Sin embargo, en el caso de las vigas hiperestáticas esta función de momento flexionante NO se puede calcular tan directamente y por ese motivo el proceso de solución de la EDO se complica considerablemente.



### 1.3. HIPÓTESIS

La confiabilidad en las predicciones de la respuesta de vigas continuas de concreto reforzado, puede ser mejorada sustancialmente mediante la adición de las relaciones no lineales **momento-curvatura ( $M-\phi$ )** de las secciones transversales en el planteamiento del modelo matemático.

### 1.4. OBJETIVOS

#### 1.4.1. OBJETIVO GENERAL.

Desarrollar una metodología analítica para el cálculo de las deflexiones en vigas de concreto reforzado, sometidas a flexión bajo cargas cuasi-estáticas (no considera fuerzas inerciales) y considerando la no linealidad de los materiales.

#### 1.4.2. OBJETIVOS PARTICULARES.

- a) Crear un modelo matemático más realista, considerando la no linealidad del concreto y el acero, para mejorar su confiabilidad en la predicción de la respuesta.
- b) Desarrollar una metodología de solución para ese modelo, aplicable a sistemas estructurales no lineales.

Comparar los resultados de esta metodología, aplicada a vigas continuas hiperestáticas, con respecto a los resultados obtenidos mediante el método especificado por el manual de construcción de concreto del American Concrete Institute (ACI), comité ACI-318 (Committee 318, American Concrete Institute, 2008) y comité ACI435-R (ACI435R-95 R. b., 1995).

## **CAPÍTULO 2**

### **MARCO TEÓRICO**

---

#### **2.1. INTRODUCCIÓN**

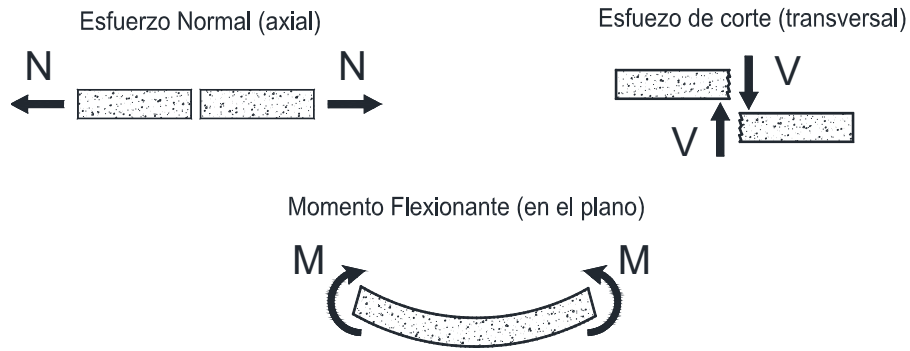
El concreto reforzado se ha convertido en el material más utilizado para la construcción de la infraestructura de nuestro país. Esto se debe a las ventajas económicas y de manejo de este material.

Los fundamentos del diseño de las estructuras de concreto reforzado se basan en la determinación del dimensionamiento adecuado para soportar con seguridad las cargas permanentes y las cargas accidentales, debidas a eventos naturales durante su vida útil. Para las estructuras de concreto reforzado, los comportamientos más destacados a evaluar son:

- a) La resistencia de la estructura.
- b) Las deformaciones, tales como las deflexiones y el desarrollo (crecimiento) de las grietas, bajo cargas de servicio.

Las ideas fundamentales en las que se basa el modelo matemático aplicado a vigas de concreto reforzado, de acuerdo a Arthur H. Nilson *et al* (Nilson, Nilson, & Charles W., 2010), son:

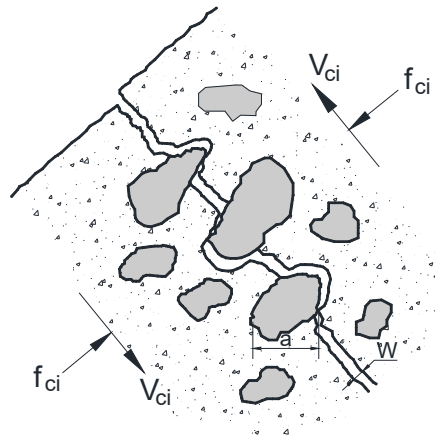
- a) Las fuerzas internas, como momentos flexionantes, fuerzas de cortante y esfuerzos normales están en equilibrio con los efectos de las cargas externas en una sección de la estructura (Ver **Figura 2**).
- b) No hay corrimiento entre las barras de acero de refuerzo y el concreto que está en contacto con ellas. Es decir, las deformaciones son las mismas en ambos materiales y se supone que hay perfecta unión entre el acero y el concreto.
- c) Las secciones transversales planas permanecen planas al ser sometidas a cargas.
- d) Relación constitutiva de los materiales. La teoría se basa en la relación esfuerzo-deformación reales y de las propiedades de resistencia de los dos materiales.
- e) La resistencia a tensión del concreto es una pequeña fracción de su resistencia a la compresión. En las zonas en tensión se producen grietas, pero por lo general son tan pequeñas que apenas son visibles, en elementos estructurales bien diseñados.



**Figura 2.** Elementos mecánicos considerados.

Bajo las condiciones de servicio de una estructura, ésta se ve afectada por factores tales como: desplazamientos excesivos, agrietamientos, corrosión del refuerzo y deterioro en la superficie del concreto.

El agrietamiento del concreto, se debe, entre otras causas, a los cambios volumétricos (Shrinkage) y los esfuerzos de tensión, e.g., esfuerzos inducidos por las fuerzas externas que actúan sobre las vigas.



**Figura 3.** Formación de las grietas causadas por esfuerzos de corte.

Podemos afirmar que, para la mayor parte de las estructuras, las deformaciones excesivas son indeseables, ya que puede perjudicar la capacidad de la estructura y provocar agrietamiento en la estructura. Las estructuras se diseñan de modo que sus deflexiones en condiciones de servicio no sobrepasen los valores admisibles prescritos por el código de construcción aplicable.

## 2.2. ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO.

El concreto se considera como un material frágil, presenta una buena resistencia a la compresión, mientras que su resistencia a la tensión es mínima. Debido a este comportamiento del concreto, los procedimientos de diseño convencionales desprecian los esfuerzos en las zonas de tensión, para el cálculo de la resistencia nominal de vigas. La resistencia a la tensión es suministrada por las varillas de acero. La interacción entre el concreto y el acero permite tener un material compuesto con propiedades de resistencia balanceadas a compresión y tensión.

El modelo matemático aplicado a vigas de concreto reforzado, tiene sus orígenes en las teorías de resistencia última: la teoría a la flexión de Thullie de 1897 y la teoría de la distribución parabólica de esfuerzos de Ritter de 1899, (Park & T., 1983). Posteriormente, Coignet y Tedesco (Park & T., 1983) fueron los primeros en introducir el concepto de la teoría Elástica lineal alrededor del año 1900. Uno de los motivos principales se debe a que la hipótesis de variación lineal del esfuerzo conduce a resolver problemas matemáticos más sencillos. En las pruebas de laboratorio, realizadas en modelos físicos (especímenes), las estructuras que fueron diseñadas con este principio presentaban comportamiento satisfactorio bajo cargas de servicio.

A continuación, se describen algunos de las metodologías de diseño para las estructuras de concreto reforzado. Estas han permitido diseñar y construir diversas estructuras durante un poco más de un siglo.

### **2.2.1. DISEÑO POR ESFUERZOS DE TRABAJO (TEORÍA ELÁSTICA).**

Hasta mediados del siglo XX, la metodología de diseño prevaleciente en los Estados Unidos de América estaba basada en la teoría por esfuerzos de trabajo. Esta metodología fue adoptada por el Instituto Americano del Concreto (ACI), en su código de diseño para el concreto reforzado. Esta metodología se basa en la variación elástico-lineal en la relación esfuerzo-deformación de los materiales empleados. El propósito de diseño es asegurar que los esfuerzos actuantes en el acero y el concreto, no excedan los esfuerzos de trabajo bajo cargas de servicio.

Para el cálculo de los elementos mecánicos en las estructuras diseñadas, se utilizaron técnicas de análisis estructural basadas en la teoría de la elasticidad lineal.

### **2.2.2. DISEÑO POR RESISTENCIA ÚLTIMA.**

A partir del año 1955, en el código del ACI se introdujo el diseño por última resistencia. En esta metodología, se considera que los materiales que componen las vigas de concreto reforzado tienen un comportamiento inelástico-no lineal en su relación esfuerzo-deformación.

Al igual que con la metodología de esfuerzos de trabajo, los elementos mecánicos, en las vigas que componen las estructuras, se evalúan mediante técnicas de análisis estructural basadas en el comportamiento elástico-lineal de los materiales. Sin embargo, existen provisiones en el código ACI que permiten

considerar el comportamiento no lineal de los materiales mediante el concepto de redistribución de los momentos flexionante.

Para entender mejor el diseño por resistencia última se enumeran algunos criterios del análisis publicado por Park y Paulay (Park & T., 1983):

- a) Las secciones de concreto reforzado se comportan inelásticamente bajo la acción de las cargas últimas de diseño. En consecuencia, la teoría elástica no puede dar una predicción segura de la resistencia máxima de los elementos estructurales.
- b) El diseño por resistencia última permite una selección más razonable de los valores de los factores de carga.
- c) Las relaciones constitutivas del acero y el concreto, son no lineales. El concepto de relaciones de módulos no se necesita para el cálculo de las propiedades de rigidez y resistencia de las secciones compuestas.
- d) En general, la aplicación de esta metodología produce diseños más eficientes. Dimensiones más pequeñas y menor cantidad de acero de refuerzo.
- e) También permite la evaluación de la capacidad para desarrollar ductilidad de la estructura, ante la acción de cargas gravitacionales o de cargas sísmicas.



### **2.2.3. DISEÑO POR ESTADO DE SERVICIO.**

El diseño por resistencia última se utiliza para dimensionar las secciones de los elementos estructurales, tal que se cumplan los requerimientos de resistencia última. Por otro lado, el diseño por estado de servicio es utilizado para revisar los criterios de agrietamiento y de las deflexiones bajo cargas no factorizadas (de servicio).

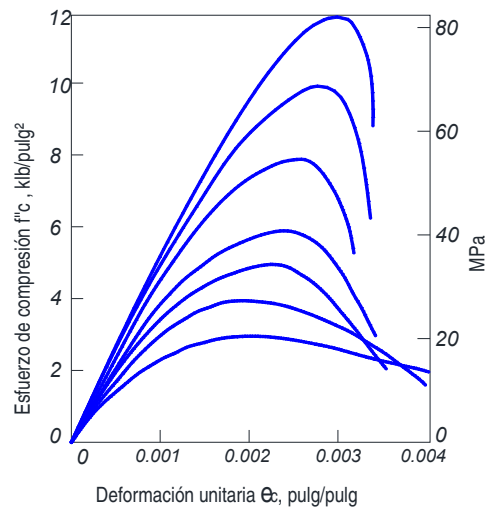
El principal requisito del diseño por servicio es revisar que las dimensiones de la sección, obtenidas durante el diseño por resistencia última, provean a la viga de la suficiente rigidez; esto con el propósito de mantener bajo control las deflexiones máximas y la cantidad y tamaño de las grietas. En el código del ACI se hace gran énfasis en el diseño por resistencia última, con comprobaciones del comportamiento bajo cargas de servicio.

### **2.2.4. COMPORTAMIENTO EXPERIMENTAL DEL CONCRETO Y EL ACERO DE REFUERZO.**

#### **a) CONCRETO SIMPLE**

Las pruebas estandarizadas para cilindros de concreto simple en compresión, ASTM-C31 (ASTM-C31, 2017), NMX-C-083-ONNCE (NMX-C-083-ONNCE-2014, 2014) y varillas de acero ASTM-E8 (ASTM-E8, 2015), utilizadas para reforzar el concreto, nos permite medir la relación esfuerzo-deformación de estos dos materiales.

En la **Figura 4**, se presentan algunas relaciones  $\sigma$ - $\epsilon$ , obtenidas experimentalmente para concreto simple en una prueba de compresión uniaxial no confinada, con cilindros estándar (Nilson, Nilson, & Charles W., 2010). Las siete curvas mostradas corresponden a concretos de resistencias máximas de aproximadamente 20 MPa hasta 85 MPa.



**Figura 4.** Curva  $\sigma$ - $\epsilon$  del concreto en compresión, para peso volumétrico de 2300kg/m<sup>3</sup>.

Los resultados experimentales muestran una tendencia clara en cuanto a la deformación correspondiente a la resistencia máxima, i.e., varía desde aproximadamente 0.002 para concretos de 20 MPa hasta 0.003 para concretos de 85 MPa. La zona de ablandamiento por deformación tiende a ser menor para concretos de alta resistencia. Esto último lo podemos asociar con la tendencia a la fragilización del concreto.

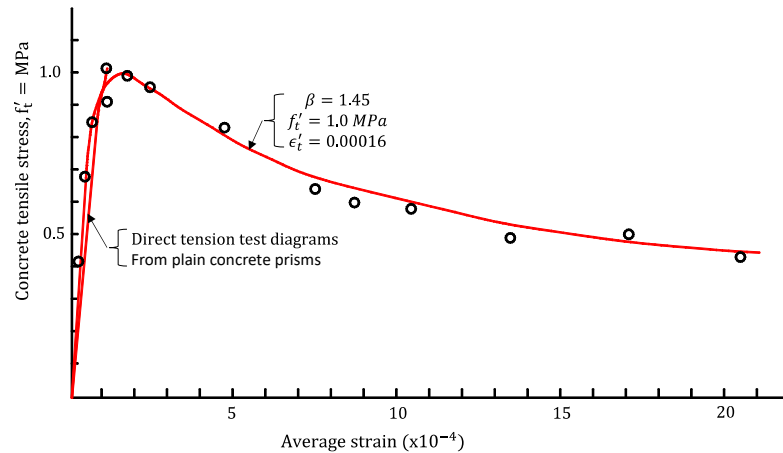
Es conocido que el concreto continúa adquiriendo resistencia más allá de los 28 días, pudiendo alcanzar una resistencia final (años después de fabricado el

concreto) aproximadamente hasta un 5% adicional (Nilson, Nilson, & Charles W., 2010).

Las curvas  $\sigma$ - $\epsilon$ , en la rama de compresión, presentan una porción inicial elástica casi lineal, hasta aproximadamente un medio de la resistencia máxima a compresión, disminuyendo gradualmente su rigidez hasta llegar al esfuerzo máximo. Para concretos normales, este esfuerzo máximo corresponde con una deformación unitaria que varía de 0.002 a 0.0035 (Nilson, Nilson, & Charles W., 2010). (Ver **Figura 4**).

Como se observa en la figura, todas las curvas muestran un tramo descendente (ablandamiento por deformación) después de haber alcanzado el esfuerzo a compresión máxima, sin embargo, este depende de la rigidez del equipo utilizado en el ensaye.

La **resistencia a tensión** del concreto simple es por lo general del 10% al 15% de la resistencia a la compresión (Park & T., 1983). Esta resistencia se puede medir mediante la prueba estandarizada denominada prueba brasileña de la norma ASTM-C496 (ASTM-C-496, 1996). También es posible utilizar la prueba estandarizada para obtener el módulo de ruptura ASTM-C78 (ASTM-C78).



**Figura 5.** Curva  $\sigma$ - $\epsilon$  del concreto en tensión de pruebas experimentales, Carreira-Chu 1986 (Carreira & Chu, Stress-Strain relationship for Reinforced Concrete in Tension, 1986) .

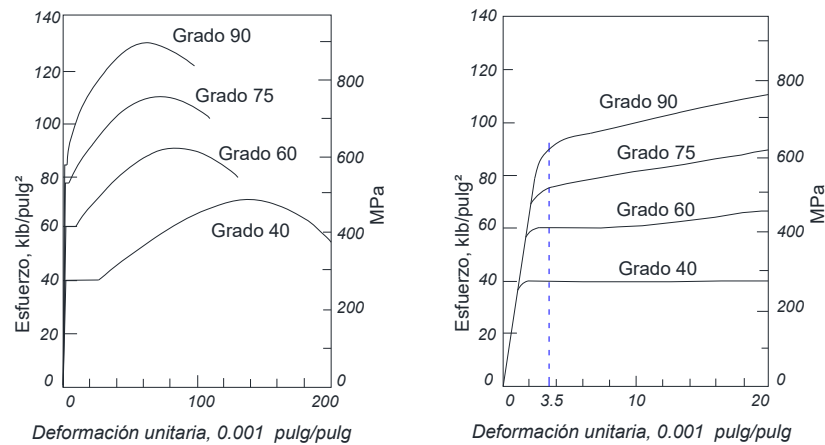
Debido a la baja resistencia a tensión del concreto, comúnmente se desprecia en el diseño de elementos de concreto reforzado. Sin embargo, para el cálculo de las deformaciones es necesario incluir esta resistencia y rigidez.

## b) ACERO DE REFUERZO

Para el caso de las varillas de acero corrugado para refuerzo se presentan algunas relaciones  $\sigma$ - $\epsilon$  (suavizadas) en la **Figura 6**, obtenidas experimentalmente mediante el ensaye estandarizado ASTM-E8 (ASTM-E8, 2015).

El ACI permite utilizar aceros de refuerzo con esfuerzo de fluencia ( $f_y$ ) de hasta 80 Ksi (5624kg/cm<sup>2</sup>) con una deformación unitaria no mayor a 0.0035. En la figura se presentan las curvas  $\sigma$ - $\epsilon$  del acero ensayado a tensión; la imagen de la derecha se muestra con un aumento x100, en el eje de  $\epsilon$ , con el propósito de mostrar la variación de la meseta de cedencia para los grados de acero estructural comunes en la práctica profesional de la ingeniería.

Para los fines del diseño estructural de elementos de concreto reforzado y la investigación de su comportamiento, se debe verificar con especial cuidado las siguientes propiedades mecánicas del acero de refuerzo: (1)  $f_y$ , (2) módulo de elasticidad y (3) la existencia de la meseta de cedencia.



**Figura 6.** Curvas típicas de  $\sigma$ - $\epsilon$  para el acero de refuerzo.

## 2.3. MODELOS MATEMÁTICOS DE LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MATERIALES.

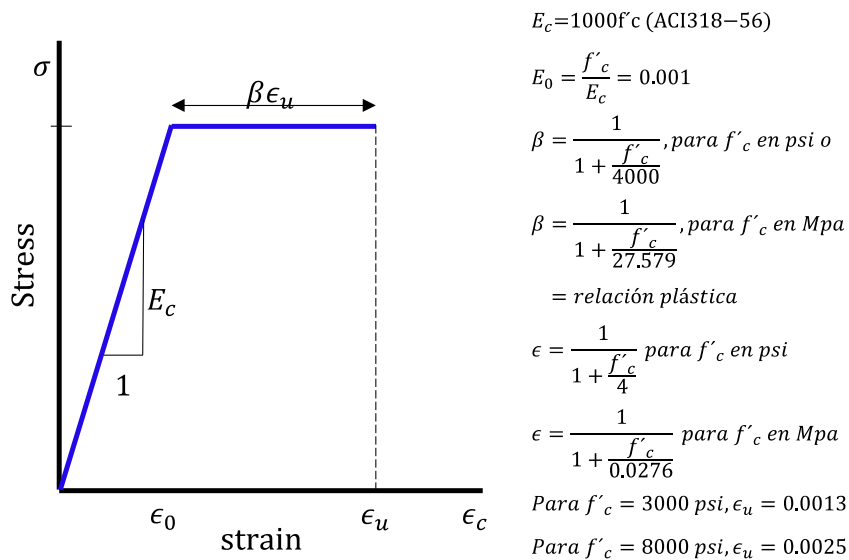
Los modelos matemáticos de las relaciones constitutivas del concreto simple y el acero de refuerzo nos permiten simular el comportamiento mecánico de estos materiales cuando son sometidos a esfuerzos de compresión o de tensión. Estos modelos permiten calcular las relaciones momento-curvatura ( $M$ - $\phi$ ) para una sección de concreto reforzado. En secciones posteriores de este capítulo se muestra cómo utilizarlas para este propósito.

A continuación, se presentan brevemente algunos modelos matemáticos existentes en la literatura para la relación  $\sigma$ - $\epsilon$ , ver (Carreira & Chu, Stress-Strain

Relationship for Plain Concrete in Compression, ACI Journal., 1985), (Jensen, 1943), (Park & T., 1983). Estos son algunos de los modelos más citados, sin embargo, se pueden encontrar otros modelos en la literatura.

### 2.3.1. MODELO DE JENSEN PARA CONCRETO SIMPLE.

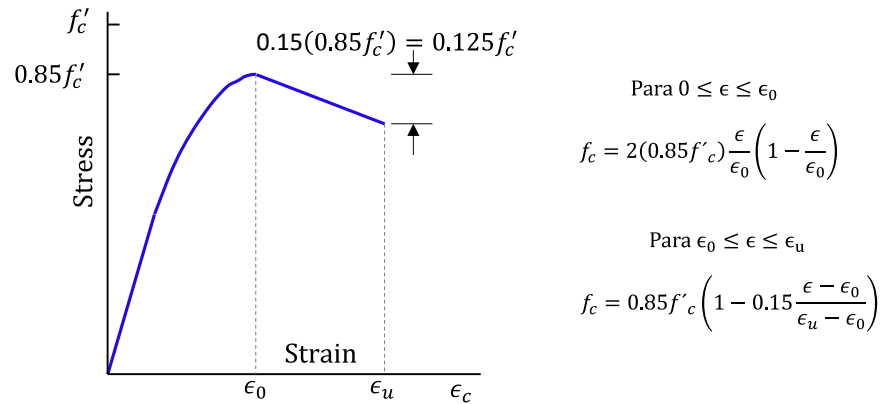
Jensen (Jensen, 1943) propuso un modelo con comportamiento elástico perfectamente plástico del concreto en compresión, como se muestra en la **Figura 7**.



**Figura 7.** Modelo de  $\sigma$ - $\epsilon$  propuesto por Jensen.

### 2.3.2. MODELO DE HOGNESTAD PARA CONCRETO SIMPLE.

Este modelo fue propuesto por E. Hognestad (Hognestad, 1951) en el año de 1951. Está compuesto por una parábola en la parte ascendente y una función lineal en la parte descendente. (Ver **Figura 8**).



**Figura 8.** Modelo de  $\sigma$ - $\epsilon$  propuesto por Hognestad.

### 2.3.3. MODELO DE CARREIRA-CHU PARA CONCRETO SIMPLE.

Carreira y Chu (Carreira & Chu, Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression, ACI Journal., 1985) propusieron este modelo para el concreto simple en compresión, ver **Figura 9**. El modelo fue desarrollado para resistencias máximas a compresión del concreto entre 1.1ksi y 20.3ksi (78 kg/cm<sup>2</sup> y 1427.3 kg/cm<sup>2</sup>).

Este modelo lo obtuvieron mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los parámetros del modelo. El ajuste se basó en relaciones  $\sigma$ - $\epsilon$  obtenidas experimentalmente por diversos investigadores.

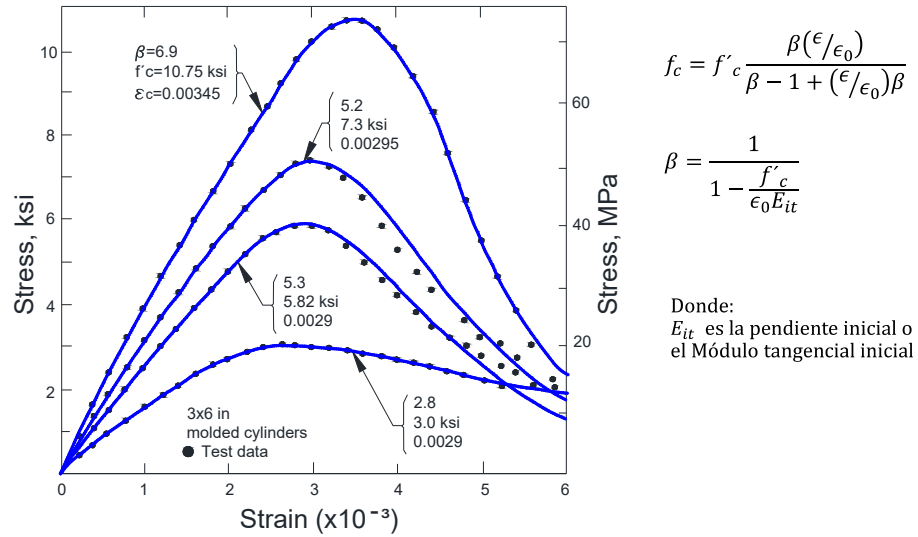


Figura 9. Diagrama de  $\sigma$ - $\epsilon$  y su modelo matemático.

#### 2.3.4. MODELO DE ACI-318 PARA EL ACERO DE REFUERZO.

El ACI 318-05 en su sección 8.5.2, propone un modelo bilineal de la relación  $\sigma$ - $\epsilon$ , para varillas de acero corrugado sometido a esfuerzos de tensión y compresión. Este comportamiento es comúnmente denominado Elástico Perfectamente Plástico (EPP) (Ver Figura 10).

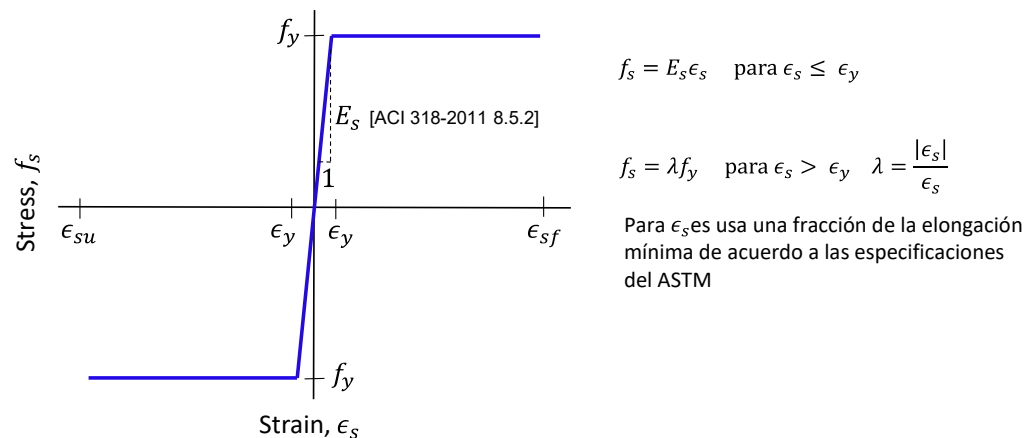
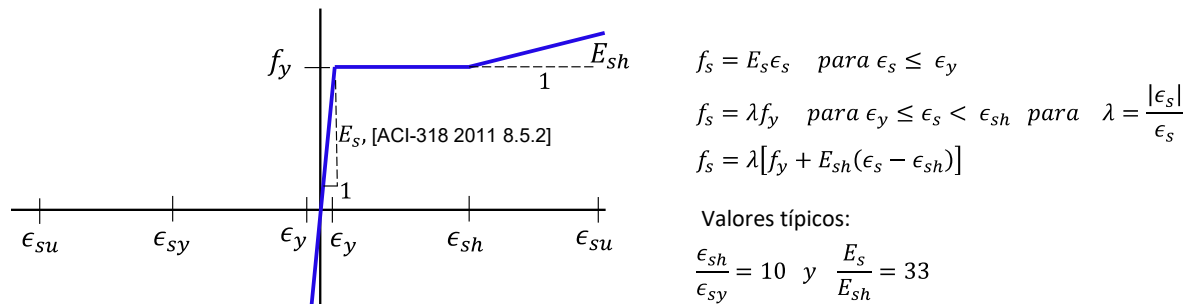


Figura 10 Diagrama EPP del acero a tensión.



### 2.3.5. MODELO TRILINEAL DEL ACI-318 PARA EL ACERO DE REFUERZO.

Este modelo es una variante más de la propuesta del comité ACI 318-05, donde la última pendiente ascendente es interpretada como el endurecimiento por deformación del acero, en sus ramas de compresión y tensión.



**Figura 11.** Diagrama Trilineal del acero en tensión

### 2.3.6. MODELO DE ACERO SIN MESETA DE CEDENCIA.

Las varillas de acero para refuerzo del concreto se fabrican con aceros que deben cumplir con la norma ASTM [ASTM A-569]. Se ha encontrado que algunos de estos aceros, aunque cumplen con la norma en sus prescripciones de resistencias mínimas a la cedencia ( $f_y$ ) y el esfuerzo último ( $f_{su}$ ), esta norma no exige la existencia de una meseta de cedencia ni el rango de deformaciones que debe abarcar (longitud de la meseta de cedencia). Como es conocido, la existencia de esta meseta es crucial para el cálculo de la resistencia nominal en flexión de una viga de concreto reforzado, tal como es definida en el manual del comité ACI-318.

En la **Figura 12** se presenta el modelo matemático de la relación  $\sigma$ - $\epsilon$  para este tipo de acero. En esta investigación sólo se utilizó para fines de la misma.

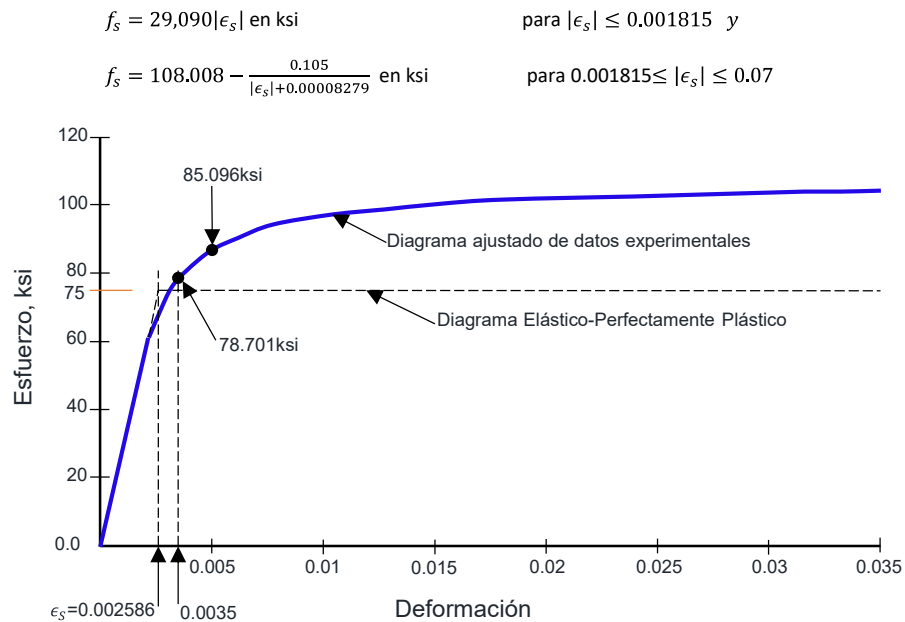


Figura 12. Modelo  $\sigma$ - $\epsilon$  del acero de refuerzo.

## 2.4. TEORÍA DE LAS VIGAS DE CONCRETO REFORZADO.

### 2.4.1 INTRODUCCIÓN.

De acuerdo a Park y Paulay (Park & T., 1983) existen tres comportamientos deseables de las vigas de CR sometidas a flexión:

- a) No debe de ocurrir falla frágil en las vigas. Al someterlas a cargas últimas se busca que la viga desarrolle grandes deformaciones, más allá de su rango de deformaciones elásticas.
- b) Mientras se va acercando a la carga máxima, algunas secciones de la viga pueden alcanzar su momento resistente último, con la aparición de articulaciones plásticas. Mientras se mantiene dicho momento último, se puede transmitir carga adicional a otras partes de la estructura. La carga última de la estructura se alcanza cuando, después de la formación de estas articulaciones plásticas, se desarrollen en un número suficiente, provocando un mecanismo plástico de falla.
- c) Los códigos de construcción recomiendan para las regiones de alta sismicidad, el diseño de vigas que puedan desarrollar gran ductilidad. El propósito es proveer a las estructuras con mecanismos capaces de disipar energía cinética mediante deformaciones inelásticas.

Cuando a una viga de concreto reforzado (CR) se le aplica fuerzas, esta se deforma. Si al retirar las fuerzas externas la estructura vuelve a adquirir su forma original, entonces se dice que la relación *esfuerzos-deformaciones* es *elástica*. En caso contrario, si la viga no recupera su forma original, presentando deformaciones

permanentes, se dice que la relación *esfuerzos-deformaciones* son *no elástico lineales*, o *plásticas* (Figura 13).

Las deformaciones elásticas varían linealmente con las fuerzas aplicadas. Este tipo de comportamiento solo se desarrolla si el material del que está compuesta la viga es deformado en su rango de deformaciones elásticas. Ver definición de rango de deformación elástica en la Figura 13.

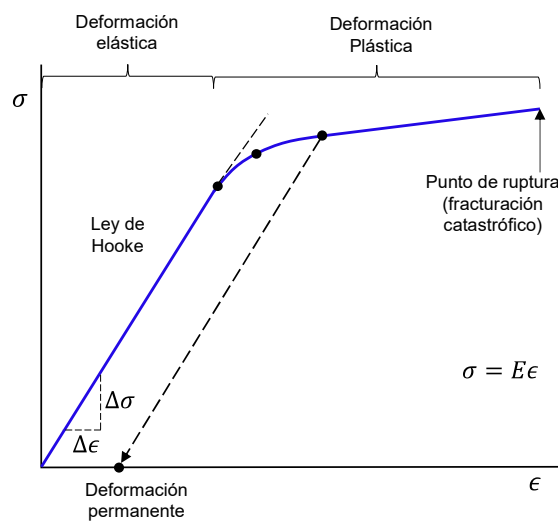
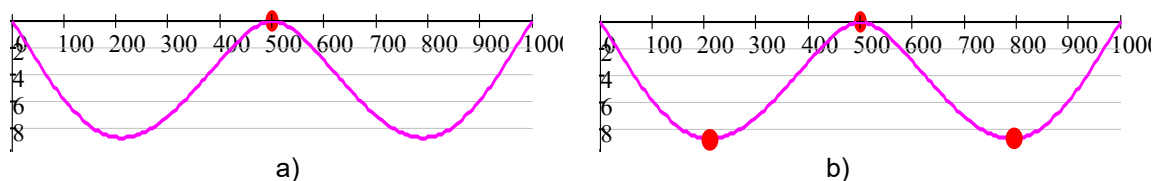


Figura 13. Relación  $\sigma$ - $\epsilon$  de un material.

#### 2.4.2 ARTICULACIONES PLÁSTICAS.

En el **Análisis Plástico** se refiere como articulaciones plásticas como puntos muy concentrados en aquellas zonas donde ocurre una disminución significativa de la rigidez a flexión, siguiendo leyes de comportamiento no lineal de los materiales. En la **Figura 14.a** se ilustra un caso típico donde, a una viga continua se aplican incrementos graduales de carga hasta alcanzar un valor límite de resistencia a flexión en la zona del apoyo central, con lo cual se origina una articulación plástica

concentrada en un punto. Sin embargo, la viga tiene la capacidad de soportar cargas posteriores pero bajo un comportamiento equivalente al de dos vigas simplemente apoyadas. Finalmente, al continuar con los incrementos de carga, se alcanza el límite de resistencia de la viga en otro punto de flexión máxima, originando dos articulaciones plásticas cercanas al centro de los claros de la viga, estas articulaciones generan el mecanismo de falla mostrado en la **Figura 14.b**.



**Figura 14.** Articulaciones plásticas en vigas de concreto de acuerdo al análisis plástico.

### 2.4.3 HIPÓTESIS BÁSICAS DE LA TEORÍA DE LAS VIGAS DE CR A FLEXIÓN.

Estos mismos autores citan las siguientes hipótesis básicas para el análisis de vigas de CR en flexión, capaces de desarrollar su momento nominal, tal como es definido por el comité ACI-318:

- a) Las secciones transversales son rectas y planas antes de la deformación, después de la deformación permanecen rectas y planas (Hipótesis de Bernoulli-Euler).
- b) Se puede considerar que la distribución del esfuerzo en el concreto es un rectángulo con un esfuerzo medio de  $0.85f'_c$  y una profundidad desde el borde de compresión de  $\beta_1c$ , donde  $c$  es la profundidad del eje neutro. El valor de  $\beta_1c$  es 0.85 para  $f'_c \leq 4\text{ksi}$  ( $281.44 \text{ kg/cm}^2$ ) y se

reduce continuamente a razón de 0.05 por cada 1ksi (70.25 kg/cm<sup>2</sup>) de resistencia que exceda los 4ksi (281.44 kg/cm<sup>2</sup>).

- c) Se ignora la resistencia a tensión del concreto.
- d) La deformación del concreto en la fibra extrema a compresión se puede considerar igual a 0.003 para miembros sometidos a flexión.
- e) El esfuerzo del acero a resistencias inferiores a la de cedencia es igual a la deformación del acero multiplicada por el módulo de elasticidad de 29000ksi (2.039x10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup>). Para deformaciones más elevadas a las correspondientes a la resistencia de cedencia, se puede considerar que el esfuerzo en el acero permanece igual a la resistencia de cedencia.

#### 2.4.4 MODELO MATEMÁTICO.

La teoría de las vigas elásticas relaciona el momento interno, desplazamiento transversal y la curvatura de la viga. La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (ec.1), escrita de nuevo aquí:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Es el modelo matemático que relaciona estos tres parámetros. El problema del cálculo de las deflexiones en vigas consiste en resolver esta EDO para las condiciones de frontera correspondientes a cada caso particular.

Esta ecuación se deriva a partir de hipótesis básicas, aplicables a materiales con relaciones esfuerzo-deformación elástico lineal, las cuales son:

- a) Las secciones transversales son rectas y planas antes de la deformación y permanecen rectas y planas después de la deformación (Hipótesis de Bernoulli-Euler).
- b) La relación esfuerzo-deformación del material que compone la viga sometida a flexión es elástico lineal. Es decir, la Ley de Hooke es aplicable.

A partir de consideraciones de equilibrio de las fuerzas internas en la viga en flexión se derivan las relaciones adicionales:

$$\text{Para la fuerza cortante:} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{V}{EI} \quad (2)$$

$$\text{Para la carga:} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{W}{EI} \quad (3)$$

En los problemas de vigas isostáticas es más sencillo resolver la ecuación 1 mediante métodos de integración directa, obteniendo soluciones analíticas. Esto es posible solo si las relaciones esfuerzo-deformación son elástico-lineales.

## 2.5. RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA.

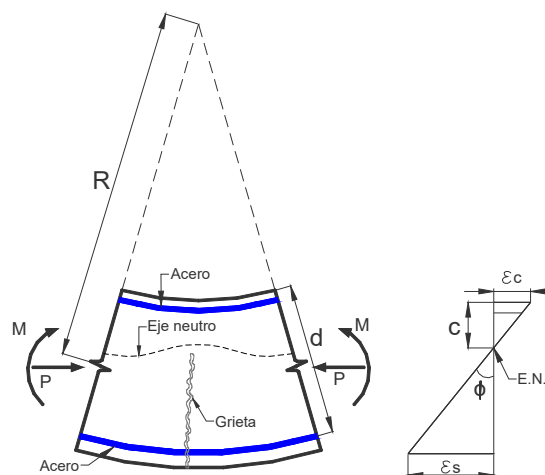
### 2.5.1. DEFINICIÓN DE MOMENTO-CURVATURA.

La curvatura se define como el cambio de ángulo entre dos secciones transversales planas, por unidad de longitud (Nilson, Nilson, & Charles W., 2010). Considerando la hipótesis de desplazamientos pequeños, la curvatura se define como se indica en la ecuación 4.

$$\varphi(x) \sim \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4)$$

Es posible calcular la relación de **M- $\varphi$** , mediante el uso de las relaciones  **$\sigma$ - $\epsilon$**  de los materiales y las restantes hipótesis postuladas anteriormente.

En la **Figura 15**, se muestra un segmento de viga de longitud  $dx$ . Las deformaciones del acero ( $\epsilon_s$ ) y del concreto ( $\epsilon_c$ ) varían linealmente con la altura, i.e., son directamente proporcionales a la distancia “ $y$ ”, la cual se mide respecto a la posición del eje neutro de la sección transversal.



**Figura 15.** Representación gráfica de la curvatura de una sección de viga de concreto.



La curvatura se define, considerando desplazamientos pequeños, como se indica en la ecuación 5.

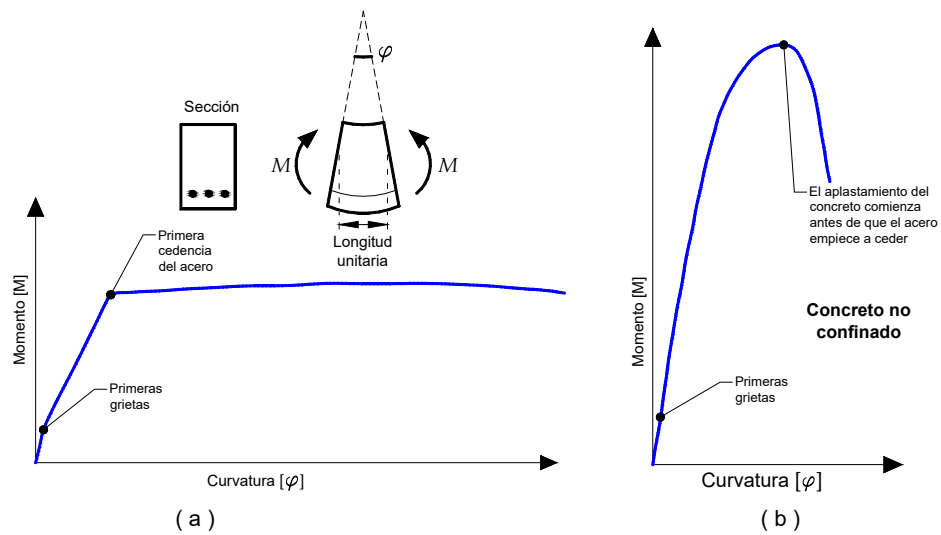
$$\varphi(x) \Rightarrow \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} \quad (5)$$

Donde

$c$ : es la distancia ente el eje neutro a la fibra extrema a compresión.

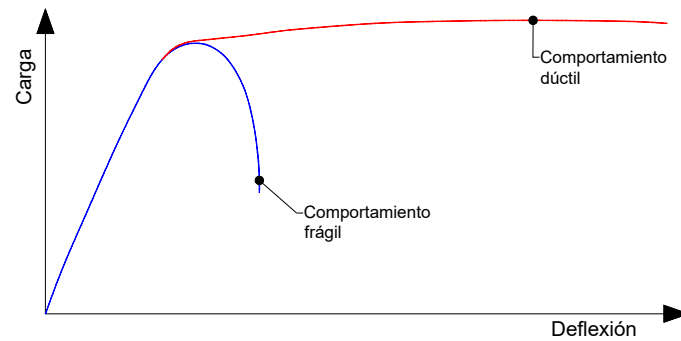
La curvatura puede ir variando a lo largo de toda la viga, debido a la variación de la profundidad del eje neutro y de las deformaciones en el interior de las dovelas formadas al aparecer las grietas. Después de la aparición de las grietas, sólo el acero de refuerzo puede transmitir las tensiones entre dovelas adyacentes.

Cuando se tiene una sección ligeramente reforzada, la relación  $M-\varphi$  es prácticamente lineal hasta el punto en que el acero de refuerzo alcanza su deformación de cedencia. Después de la cedencia aumenta la curvatura sin incremento considerable en el momento flexionante (ver **Figura 16.a**). En caso contrario, cuando es una sección fuertemente reforzada, la curva  $M-\varphi$  deja de ser lineal, alcanzando curvaturas pequeñas con el aumento considerable en el momento flexionante, conduciendo a una falla poco dúctil (Ver **Figura 16.b**).



**Figura 16.** Relación  $M-\phi$ , a) sección ligeramente reforzada. b) sección fuertemente reforzada.

En la **Figura 17**, se muestran dos gráficos de  $M-\phi$ , las cuales ejemplifican los principales tipos de falla de una viga de CR.

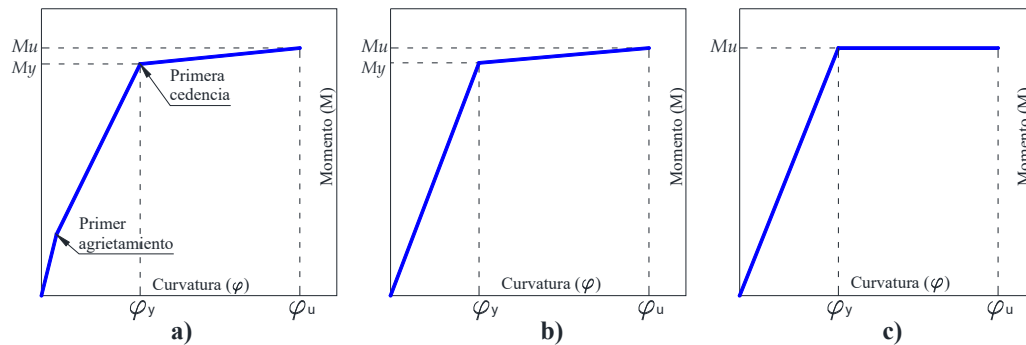


**Figura 17.** Curva carga-deformación de miembros a flexión.

### 2.5.2. MODELO ANALÍTICO PARA LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA.

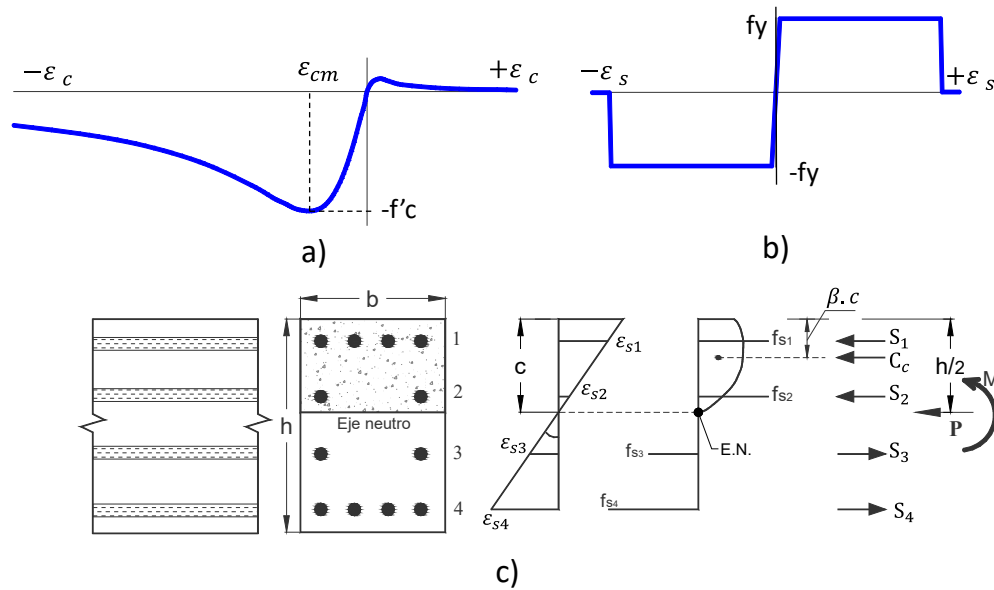
Existen diferentes tipos de modelos idealizados que ejemplifican la relación  $M-\phi$  para estructuras de concreto reforzado. Debido a que es más laborioso utilizar las relaciones  $M-\phi$  obtenidas de pruebas experimentales, en el proceso de solución de la ecuación 7. Para facilitar la solución del modelo matemático, diversos investigadores han optado por usar relaciones  $M-\phi$  simplificadas bi o tri lineales.

Algunas relaciones  $M-\phi$  simplificadas tienen las características presentadas en la **Figura 18**. En estas gráficas se pueden observar comportamientos derivados de las hipótesis adoptadas, i.e., relaciones constitutivas de los materiales, secciones planas, no corrimiento de varillas respecto al concreto, etc.



**Figura 18.** Relación  $M-\phi$  de modelos simplificados.

En la **Figura 19**, se muestra de forma esquemática la información necesaria para obtener la relación  $M-\phi$  de una sección rectangular doblemente reforzada con acero a tensión y compresión.



**Figura 19.** Información teórica de la relación  $M-\phi$ , a) Concreto a compresión y tensión, b) acero en tensión y compresión, c) sección con deformación, esfuerzos y distribución de fuerzas.

Si se conoce (propone) la magnitud de la deformación máxima ( $\epsilon_1$ ) en el concreto en compresión, mediante relaciones geométricas simples, se pueden calcular las deformaciones en las diferentes varillas de acero presentes en la sección transversal. Esta relación lineal se deriva de la hipótesis de las secciones planas. La deformación en la varilla  $i$ -ésima se calcula mediante la ecuación 6. Posteriormente se calculan los esfuerzos ( $f_s$ ) correspondientes mediante la relación constitutiva adoptada para el acero de refuerzo.

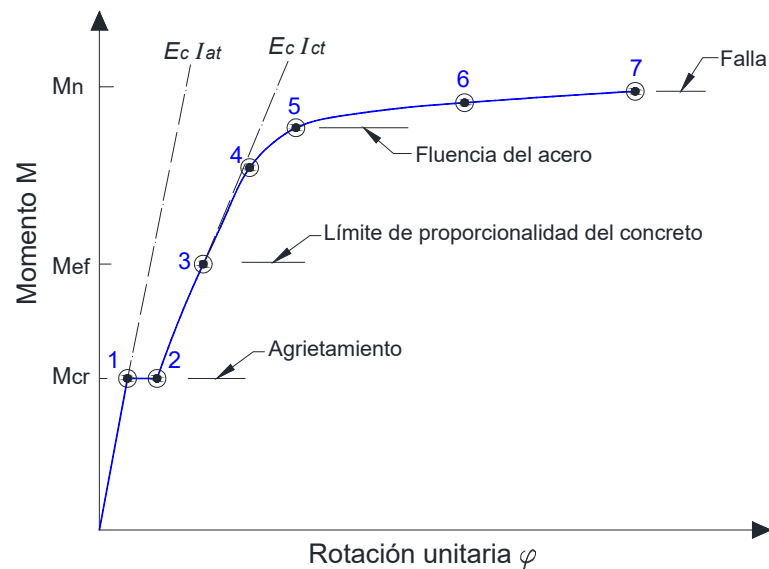
$$\epsilon_{si} = \epsilon_1 \frac{c-d}{c} \quad (6)$$

La curvatura se puede calcular como:

$$\varphi = \frac{\epsilon_1}{c} \quad (7)$$

El cálculo de la relación  $M-\varphi$  de una sección transversal, se reduce a la solución de la ecuación de equilibrio de las fuerzas internas, asumiendo las deformaciones en términos de la distancia " $c$ ".

Al utilizar las relaciones esfuerzo-deformación de los materiales, se deben considerar los cambios de pendiente. Estos cambios definen el comportamiento de la sección, e.g., en las zonas donde se inicia el agrietamiento del concreto y en el inicio de la cedencia a la tensión del acero (ver **Figura 20**).



**Figura 20.** Relación  $M-\varphi$  para vigas reforzadas a tensión.

En esta investigación, se utilizan las relaciones esfuerzo-deformación propuestas por Carreira - Chu (Carreira & Chu, Stress-Strain Relationship for Plain

Concrete in Compression, ACI Journal., 1985) para el concreto en compresión y tensión y para el acero de refuerzo el modelo propuesto por el ACI.

### **2.5.3. HIPÓTESIS PARA LA OBTENCIÓN DE LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA DE UNA SECCIÓN.**

Las hipótesis básicas son las siguientes (Carreira D. , 2010):

- a) *Compatibilidad de Deformaciones.* No hay corrimiento o movimiento relativo entre la unión del concreto y el acero de refuerzo en cualquier etapa de la respuesta a la flexión.
- b) *Hipótesis de las secciones planas.* Las secciones planas permanecen planas en cualquier etapa de la respuesta de la flexión.
- c) Las relaciones esfuerzo deformación de los materiales están definidas por las relaciones adoptadas.
- d) Cortante y Flexión. La distorsión por cortante no produce cambios en las longitudes de las fibras.
- e) Modo de Falla para miembros a flexión. No debe de ocurrir fallas por cortante ni por pérdida de adherencia.
- f) Las cargas se aplican monotónicamente.

#### **2.5.4. PROCEDIMIENTO PARA GENERAR EL DIAGRAMA DE MOMENTO-CURVATURA.**

Para obtener la gráfica de  $M-\phi$  se utilizó un algoritmo que se resuelve mediante las relaciones constitutivas de los materiales en conjunto con el cálculo de la profundidad del eje neutro.

A continuación, se enlista el procedimiento para obtener los diagramas de  $M-\phi$ .

- a) Definir la geometría de la sección transversal de la viga.
- b) Definir el refuerzo longitudinal de la viga, para el acero superior e inferior.
- c) Definir el modelo constitutivo del concreto para las zonas en tensión y compresión. En nuestro caso, se utilizó el Modelo de Carreira-Chu.
- d) Se define el modelo constitutivo del acero como refuerzo longitudinal. Para esto, se utilizó el modelo del ACI para varilla corrugado.
- e) Se calcula la correspondiente distribución de deformaciones de la sección transversal, usando la condición de compatibilidad de deformaciones. Se supone una deformación independiente en el concreto en compresión ( $\epsilon_1 = 0.002$ ).
- f) Calcular el valor de “c” tal que se satisfaga el equilibrio de las fuerzas internas de la sección transversal de la viga.
- g) Se comprueba las deformaciones calculadas utilizando el valor de “c” encontrado. Si no se encuentra en los límites de las condiciones propuestas, se debe de distribuir nuevamente la deformación. En dado

caso, se repite los pasos e y f hasta que cumpla con las condiciones supuestas.

- h) Se comprueba el equilibrio de las fuerzas internas en el punto que se está calculando.
- i) Calcular la curvatura correspondiente al Momento.
- j) Repetir el proceso hasta que se tenga suficientes puntos para definir el diagrama de  $M-\phi$ .

En esta investigación se utiliza un algoritmo realizado por Chávez J. H. (Chávez, 2011), que es una contribución más para la obtención de la curva de la relación momento curvatura de una sección simple o doblemente reforzada, utilizando el concepto de función de ancho de la sección.

## 2.6. CÁLCULO DE DEFLEXIONES

### 2.6.1. CÁLCULO DE LA DEFLEXIÓN CON EL MÉTODO DEL ACI.

Para la revisión por estado límite de servicio, el cálculo de las deflexiones se calcula utilizando el procedimiento analítico recomendado por el ACI-435r, también conocido con el nombre de “**Método de Branson**”, que sirve para el cálculo de deflexiones a corto plazo para estructuras de concreto reforzado. En la actualidad, diversos códigos de diseño recomiendan utilizarla ya que es muy sencilla su implementación y los resultados obtenidos son catalogados como aceptables.

**D.E. Branson** (Branson D. E., 1972) (Branson D. , 1968) (Kripanarayanan & Branson, 1972). Fue uno de los primeros investigadores en estudiar el problema de



deflexiones en elementos de concreto reforzado, su investigación publicada en 1963 se titula: “*Instantaneous And Time-Dependent Deflections On Simple And Continuous Reinforced Concrete Beams*”. Su investigación se basó en estudiar el complejo comportamiento en deformación de vigas de CR, ante la influencia de: (1) los efectos interrelacionados de las grietas, (2) deformaciones por contracción del concreto, (3) fluencia del acero, (4) porcentaje de acero de refuerzo en tensión y compresión, (5) la continuidad de vigas de dos claros, (6) la redistribución del momento flexionante en vigas estáticamente indeterminadas, etc.

De acuerdo a los resultados obtenidos en su investigación, Branson enlista los factores que obstaculizan a la correcta predicción de las deflexiones de las vigas de CR. Estos factores son:

- i. La falta de conocimiento preciso de las propiedades mecánicas del concreto.
- ii. Temperatura ambiente y humedad a lo largo de los años en que la viga estará funcionando.
- iii. Los efectos por fluencia (Creep) y contracción por secado (Shrinkage).
- iv. El agrietamiento en el rango de deformaciones elástico-lineales.
- v. El cambio de posición del eje neutro con respecto al tiempo como consecuencia de las deformaciones al ir incrementando la carga.

La expresión siguiente, fue introducida por Dan E. Branson (Branson D. E., 1972) (Branson D. , 1968) (Kripanarayanan & Branson, 1972) (ACI435R-95 R. b., 1995) para predecir la deflexión de vigas de concreto reforzado. Esta expresión

actualmente es utilizada en diversos códigos de diseño como el ACI-318 (Committee 318, American Concrete Institute, 2008) y, en ciudad de México, las NTC-2004 (NTC2004-DF, 2004), esto para estructuras de CR.

$$I_{eff} = \left( \frac{M_{cr}}{M_{max}} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_{max}} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (8)$$

Dónde:

$I_{eff}$  = Momento de inercia efectiva.

$M_{cr}$  = Momento de Agrietamiento.

$M_{max}$  = Momento flexionante máximo correspondiente al nivel de carga para el cual se estima la deflexión.

$I_{cr}$  = Momento de inercia de la sección transformada agrietada.

$I_g$  = Momento de inercia de la sección bruta del concreto.

El método de Branson, consiste en determinar una inercia efectiva ( $I_{eff}$ ), por interpolación entre la inercia de la pieza de la sección gruesa ( $I_g$ ) y de la inercia agrietada ( $I_{cr}$ ). Las deflexiones que ocurren inmediatamente al aplicar la carga se calculan con los métodos directos para determinar deflexiones elásticas. Por ejemplo, en el caso de una viga simplemente apoyada sometida a carga uniformemente distribuida, la inercia a flexión deberá ser sustituida por  $I_{eff}$ , i.e.,  $\delta =$

$$\frac{5wL^4}{384E I_{eff}}, \text{ para el cálculo de la flecha máxima.}$$

Es importante remarcar que la obtención de la ecuación del momento de inercia efectiva ( $I_{eff}$ ) es el resultado de una serie de ensayos realizados con especímenes de vigas de CR simplemente apoyadas y vigas continuas, realizados por D. E. Branson en la década de los 60's.

Para las deflexiones de elementos de concreto de peso normal se calculan con el  $I_{eff}$  (ecuación 8) con la recomendación de que  $I_{eff}$  no debe de ser mayor que la inercia gruesa  $I_g$ .

**ACI 435R-95, “Control of Deflection in Concrete Structures”** (ACI435R-95 R. b., 1995). Este manual prescribe peraltes mínimos, con el propósito de NO realizar la evaluación de las flechas, para los fines del diseño. El diseñador tiene la opción de calcular las flechas con el método de Branson.

En el caso de vigas continuas, el manual recomienda tomar una inercia efectiva calculada como el valor promedio de la inercia obtenida a partir de la ecuación 8, para las secciones de momento máximo positivo y máximo negativo. Utilizar:

**Para vigas con un extremo continuo:**

$$I_e = 0.85I_{e(m)} + 0.15I_{e(1)} \quad (9)$$

**Para vigas con ambos extremos continuos**

$$I_e = 0.70I_{e(m)} + 0.15[I_{e(1)} + I_{e(2)}] \quad (10)$$

Donde:

$I_{e(m)}$  es la inercia para la sección correspondiente al centro del claro. Zona de momento flexionante máximo positivo.

$I_{e(1)}$  e  $I_{e(2)}$  es la inercia para la sección correspondiente a las zonas de apoyos de la viga.

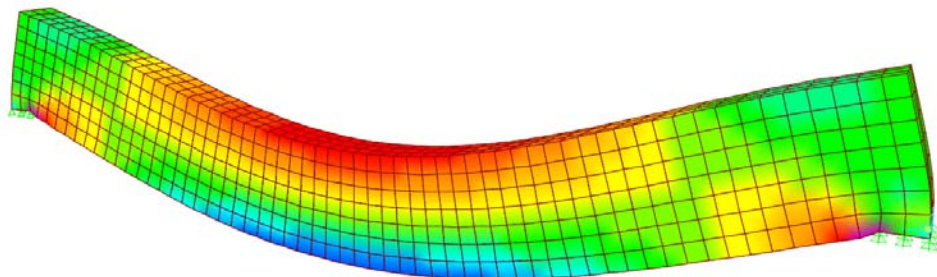
### 2.6.2. CALCULO DE DEFLEXIONES CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Hasta el momento se tienen dos metodologías con diferentes enfoques para la resolución de problemas en vigas en flexión:

#### c) Elementos sólidos tridimensionales

Estos son elementos finitos tridimensionales generalizados. El volumen de la viga se discretiza en una gran cantidad de estos pequeños elementos, lo que genera una gran cantidad de grados de libertad (GL) en la viga. El tamaño de los elementos finitos depende principalmente del nivel de precisión buscado en la solución del modelo matemático. Estos elementos finitos se emplean principalmente en el área de la investigación, para el análisis de vigas de geometría simple y pocos apoyos. Esta modelación permite predecir fenómenos tales como la aparición y crecimiento (propagación) de las grietas durante un lapso de tiempo finito en una viga de CR.

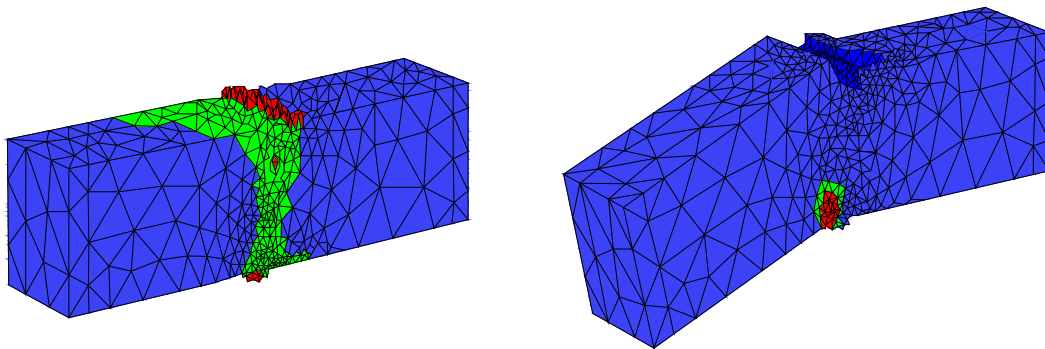
En la siguiente figura se presentan los esfuerzos normales longitudinales mediante una escala de colores que indica la magnitud de estos esfuerzos y las deformaciones de la misma.



**Figura 21.** Representación de los esfuerzos  $\sigma_{xx}$  en una viga modelada con EF 3D.

En las referencias (Gil Espert, Oñate, & Bugeda, 1996), (Becker, Carey, & Oden, 1981) - (Zienkiewicz & Taylor, 2000), se presentan aplicaciones de estos criterios en la modelación mediante elementos finitos de vigas de CR.

**T.C. Gasser y G.A. Holzapfel** (Gasser & Holzapfel, 2004), en su investigación denominada “*3D crack propagation in unreinforced concrete*”, la cual consiste en la modelación constitutiva de la propagación de grietas en 3D para el concreto no reforzado mediante el empleo de la *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), utilizando parámetros de fractura. Este método permite la separación del material de una manera muy robusta y eficiente, se mejora el espacio de elementos finitos por la función Heaviside, combinando con el concepto de fisura cohesiva. Esto conduce a una formulación de elementos finitos con discontinuidades fuertes incorporadas. La metodología utiliza elementos finitos triangulares o cuadriláteros (planos) incrustados en elementos finitos tetraédricos (3D). De esta manera, se puede modelar las discontinuidades que se generan inmediatamente después de la aparición de las micro grietas.



**Figura 22.** Propagación de las grietas (Gasser & Holzapfel, 2004).

Las formulaciones descritas anteriormente, permiten obtener predicciones de desplazamientos más consistentes con los fundamentos teóricos y, por lo tanto, valores de desplazamientos más confiables.

#### **d) Elementos tipo barra**

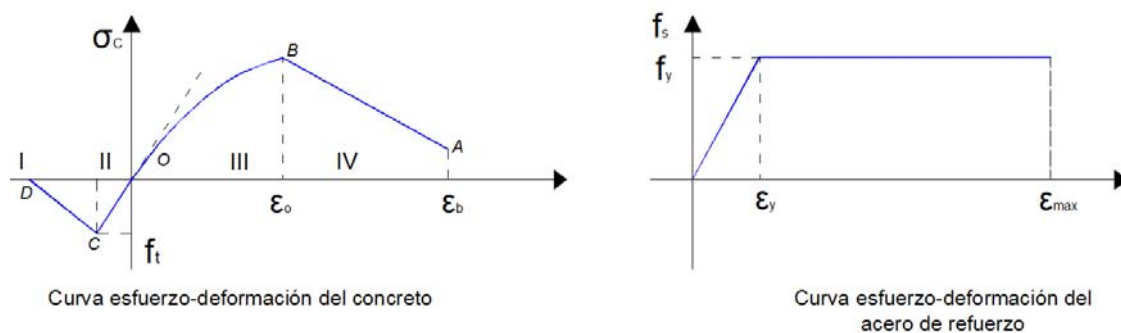
En este tipo de elemento finito se adoptan las restricciones cinemáticas aceptadas en la teoría clásica de vigas en flexión, e.g., hipótesis de las secciones planas, la cual simplifica significativamente la complejidad del problema matemático. Como consecuencia de esta formulación, en comparación con los elementos finitos sólidos 3D, se tiene una reducción considerable del número de elementos finitos y sus correspondientes GL.

En la formulación de estos elementos finitos se consideran las relaciones constitutivas esfuerzo-deformación del concreto y el acero de refuerzo. Estas relaciones incluyen la no linealidad y plasticidad de estos materiales. A partir de estas relaciones constitutivas, la hipótesis de las secciones planas, la no existencia de corrimiento entre varillas y concreto, etc., se logra incluir en la formulación la aparición de agrietamientos en el concreto en tensión y el crecimiento de las grietas.

Mediante estos elementos finitos se busca predecir la magnitud de los desplazamientos transversales con mejor precisión, sin el costo computacional de los elementos finitos sólidos 3D.

**Jie-Jiang Zhu and Yang Lee** (Jie-Jiang & Yang, 2009), en su publicación denominada *“Push-Over Analysis Programming for Reinforced Concrete Structure”*,

trabajaron en el desarrollo de un programa de análisis para edificios altos utilizando la técnica del Push-Over; Tall Building Push-Over Analysis (TBPOA) para modelar estructuras tridimensionales, con análisis estático de edificios de concreto reforzado, considerando comportamiento material elástico-perfectamente plástico. EL TBPOA modela las columnas y las vigas mediante elementos finitos tipo *barra recta prismática*. Las ecuaciones obtenidas se resuelven mediante el uso del método de Newton-Raphson y el método de longitud de arco, esto es para la solución de las ecuaciones no lineales y para la etapa del ablandamiento por deformación del concreto (etapa IV de la **Figura 23**). Las relaciones constitutivas de los materiales, empleadas en la formulación son como se muestra en la **Figura 23**.



**Figura 23.** Relaciones constitutivas del concreto y del acero utilizado por Jie-Jiang Zhu and Yang Lee.

Estas dos metodologías son bastante confiables para la predicción de desplazamientos transversales (flechas).

### 2.6.3. CÁLCULO DE DEFLEXIONES CON OTROS MÉTODOS.

U. Starossek, T. Löhning and J. Schenk (Starossek, Löhning, & Achenk, 2009), “*Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames by a Combined Method*”. En su publicación del 2009, para el análisis no lineal de estructuras de CR, los

autores proponen un método combinado entre el método de desplazamiento, el método de la matriz de transferencia y el módulo de sección, esto lleva a obtener un método de análisis efectivo para marcos de concreto reforzado y pretensado. El método combinado considera a) la no linealidad de los materiales, b) No linealidad geométrica, c) soluciones para grandes desplazamientos y rotaciones.

El cálculo del sistema se lleva a cabo gradualmente e iterativamente por el método de Newton-Raphson. A nivel de elemento, se utiliza un método de matriz de transferencia extendida. Por lo tanto, no se requieren ni el desplazamiento ni las funciones de forma de la fuerza. En cambio, las deformaciones axiales y la distribución de la curvatura a lo largo del elemento son segmentadas por aproximaciones mediante polinomios.

La idea fundamental detrás del método de la matriz de transferencia es; la transferencia de las variables dentro de los segmentos de cada elemento de principio a fin, tomando en consideración la carga, la rigidez y condiciones intermedias

**Steffen Mohr, Jesús M. Bairán, Antonio R. Marín** (Mohr, Bairán, & Marín, 2010). En su publicación denominado: *“A Frame Element Model for the Analysis of reinforced concrete Structures Under Shear and Bending”*. Modelaron la respuesta de estructuras de concreto reforzado del el efecto combinado de las fuerzas de cortante y fuerzas normales. Para esto se supone que la distribución de los esfuerzos de corte se genera mediante la superposición lineal de un conjunto de funciones de forma (polinomios algebraicos). Cada función de forma se ve afectada



por una constante, cuyo valor se calcula internamente de acuerdo con el estado de los materiales. El análisis lineal del marco se lleva a cabo mediante la Formulación de la Matriz Generalizada (*GMF*), que es un enfoque basado en la fuerza con interpolación exacta de las fuerzas a lo largo del elemento.

La principal hipótesis del modelo de la sección es que el campo de desplazamiento total de cualquier fibra en la sección transversal se puede aproximar por la suma del campo de desplazamientos de la sección-plana y un nuevo campo de desplazamiento que permite la distorsión y el hundimiento en la sección. Para ello se considera el material con comportamiento no lineal para las leyes constitutivas del concreto.

## **CAPÍTULO 3**

### **METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE DEFLEXIONES**

#### **EN VIGAS**

---

### **3.1. INTRODUCCIÓN**

Las vigas de CR son estructuras que responden no linealmente ante la acción de cargas. La fuente de esa no linealidad puede ser por: no linealidad geométrica, y no linealidad de los materiales. Es necesario considerar la no linealidad, en particular de los materiales, para poder tener una solución realista del problema de vigas de CR en flexión. Las relaciones constitutivas de los materiales que componen el concreto reforzado son no lineales (varillas de acero y concreto), esto para el rango de deformaciones al que estará típicamente sometidos los materiales.

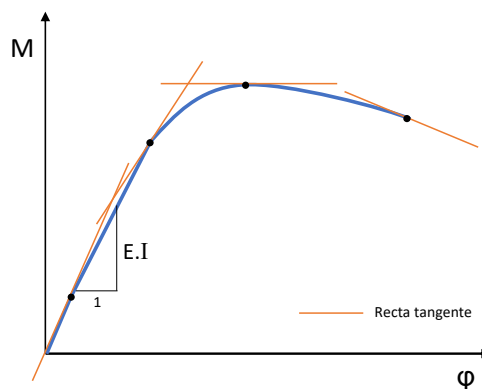
En este capítulo se describe la metodología para la obtención de la función solución del modelo matemático de las vigas en flexión, EDO de cuarto orden:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w_x}{EI}$$

La función solución,  $y(x)$ , nos permite calcular las deflexiones de la viga en cualquier punto a lo largo de la misma. La solución de esta EDO se vuelve

más laboriosa debido a: (1) la inclusión del comportamiento no lineal de los materiales utilizados en la fabricación de las vigas y (2) la hiperestaticidad de las vigas estudiadas, sometidas a cargas cuasi-estáticas.

En la EDO interviene la rigidez a flexión:  $EI$ . Esta rigidez a flexión no es constante, lo cual le da su carácter de no linealidad al modelo matemático. Esta está definida como la pendiente de la tangente de la función  $M-\phi$ , correspondiente a una cierta curvatura. Ver **Figura 24**.



**Figura 24.** Variación de la rigidez en el diagrama  $M-\phi$ .

Así, en una primera etapa, es necesario determinar la relación  **$M-\phi$**  para la sección transversal de la viga que se está estudiando.

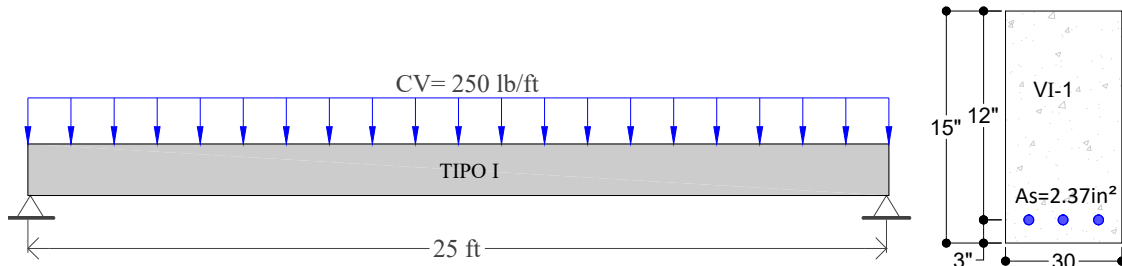
En la segunda etapa de la metodología propuesta se decidió utilizar el Método del Elemento Finito para la solución del modelo matemático. En general, la metodología *Incluye la respuesta no lineal de los materiales a partir de la relación  $M-\phi$  de las secciones transversales de las vigas.*

## 3.2. DEFINICIÓN DE LAS VIGAS PROTOTIPO.

### 3.2.1. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.

Se analiza una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida (Ver **Figura 25**), esta viga tiene su origen en los modelos propuestos por Dan E. Branson para el cálculo de las deflexiones en vigas con la inercia efectiva para cargas de servicio, el resultado se encuentra en el artículo publicado en 1968 denominado “Design Procedures for Computing Deflections (Branson D. , 1968)”.

Para la viga, las propiedades de los materiales utilizados fueron: el concreto es de  $f'_c = 3000$  psi y el acero  $f_y = 40,000$  psi. La deflexión máxima al centro del claro es de 0.731 cm (0.288 in).



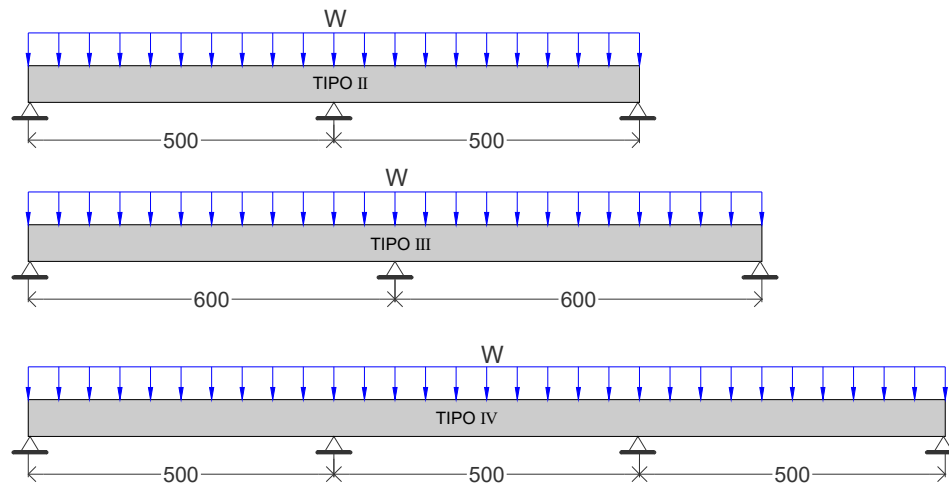
**Figura 25.** Prototipo de viga de un claro con refuerzo inferior.

En esta investigación, es importante realizar una comparativa entre el método vigente y la metodología propuesta en esta investigación. Los resultados que se obtuvieron son de gran relevancia y aclara mejor buen camino que se tomó para la solución de las vigas continuas.

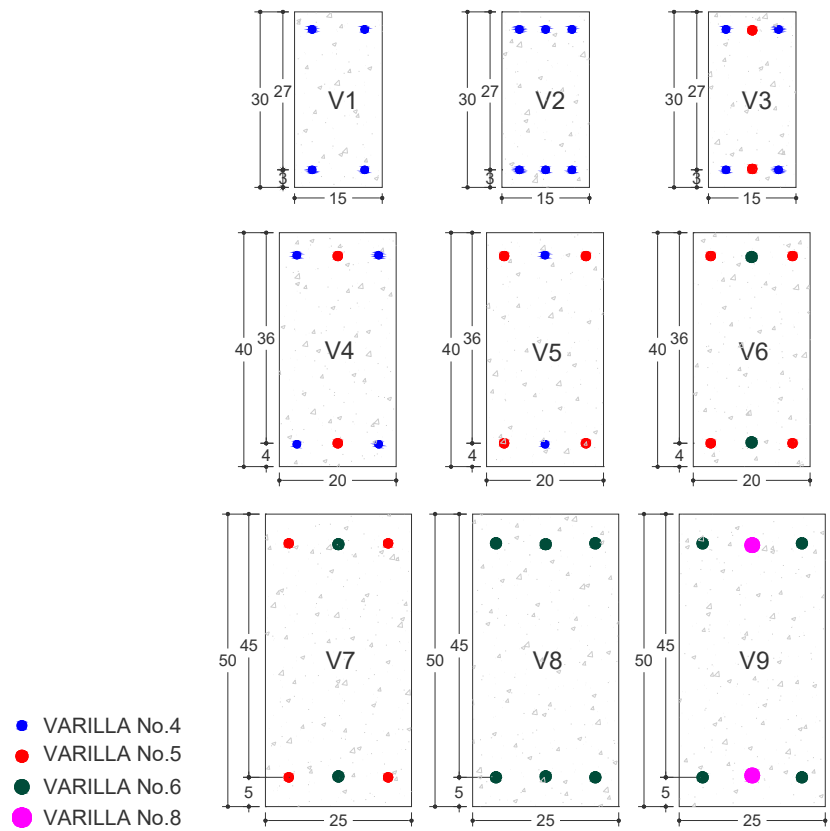
### 3.2.2. VIGAS CONTINUAS.

En esta investigación se estudiaron tres tipos de vigas con diferentes dimensiones geométricas y diferentes porcentajes de acero de refuerzo. Los porcentajes de refuerzo están dentro del rango de  $0.25\rho_b$  hasta  $0.4\rho_b$  ( $\rho_b$  es el porcentaje de acero balanceado).

El refuerzo longitudinal es a base de varillas de acero corrugado, la carga aplicada es uniformemente distribuida a lo largo de toda la viga continua.



**Figura 26.** Prototipos de vigas continuas (*longitudes en cm*).



**Figura 27.** Secciones transversales de las vigas de CR (el calibre de las varillas se lee en octavos de pulgada “#/8”).

**Tabla 1.** Refuerzo interno de las vigas de concreto.

Viga	Sección Transversal		Refuerzo Longitudinal	
	b (cm)	H (cm)	Asuperior	Asinferior
V-1	15	30	2var.#4	2var.#4
V-2			3var.#4	3var.#4
V-3			2var.#4 + 1var.#5	2var.#4 + 1var.#5
V-4	20	40	2var.#4 + 1var.#5	2var.#4 + 1var.#5
V-5			2var.#5 + 1var.#4	2var.#5 + 1var.#4
V-6			2var.#5 + 1var.#6	2var.#5 + 1var.#6
V-7	25	50	2var.#5 + 1var.#6	2var.#5 + 1var.#6
V-8			3var.#6	3var.#6
V-9			2var.#6 + 1var.#8	2var.#6 + 1var.#8

### 3.3. DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MATERIALES.

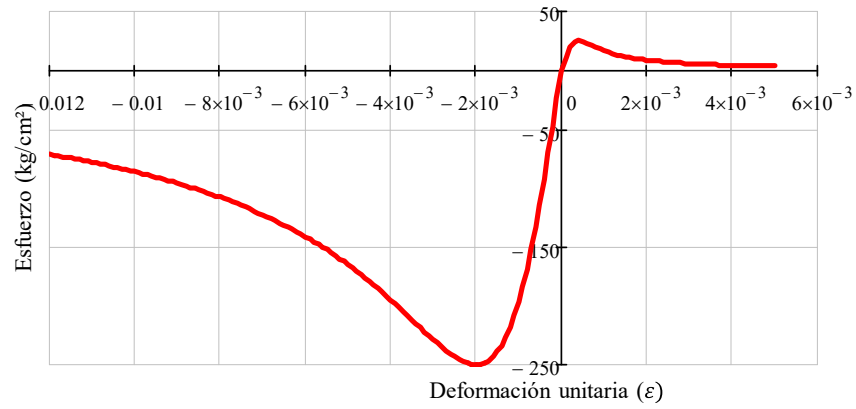
Las relaciones constitutivas de los materiales determinan la relación  $M-\phi$  de la sección transversal de las vigas. Para esta investigación se decidió utilizar los modelos de Carreira y Chu para el concreto simple, y el modelo elástico-perfectamente plástico para el acero de refuerzo. El propósito es obtener resultados más cercanos a la realidad.

#### 3.3.1. MODELO CONSTITUTIVO DEL CONCRETO.

Para el concreto simple, se utiliza el modelo de Carreira-Chu (Carreira & Chu, Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression, ACI Journal., 1985) (Carreira & Chu, Stress-Strain relationship for Reinforced Concrete in Tension, 1986) que contiene los esfuerzos en la zona de compresión (signo negativo) y la zona a tensión (signo positivo). Este modelo representa el comportamiento del concreto en las zonas en tensión de manera más apropiada, considerando indirectamente el efecto de los agrietamientos.

Los valores numéricos adoptados para el modelo del concreto son:

- La resistencia del concreto,  $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$ .
- La deformación correspondiente al esfuerzo máximo,  
 $\epsilon_0 = 0.002$ .
- El módulo de Elasticidad es de acuerdo al ACI-318,  
 $E = 15100\sqrt{f'_c}$ .



**Figura 28.** Gráfica  $\sigma - \varepsilon$  del modelo de Carreira-Chu para el concreto de  $f'_c=250\text{kgf/cm}^2$ .

Para la rama en compresión

$$\frac{f_c}{f'_c} = \frac{\beta(\varepsilon/\varepsilon'_c)}{\beta - 1 + (\varepsilon/\varepsilon'_c)^\beta} \quad (11)$$

Para la rama en tensión

$$\frac{f_c}{f'_c} = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{\beta(\varepsilon/0.2\varepsilon'_c)}{\beta - 1 + (\varepsilon/0.2\varepsilon'_c)^\beta} \quad (12)$$

Donde:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{f'_c}{\varepsilon'_c E_{it}}} \quad (13)$$

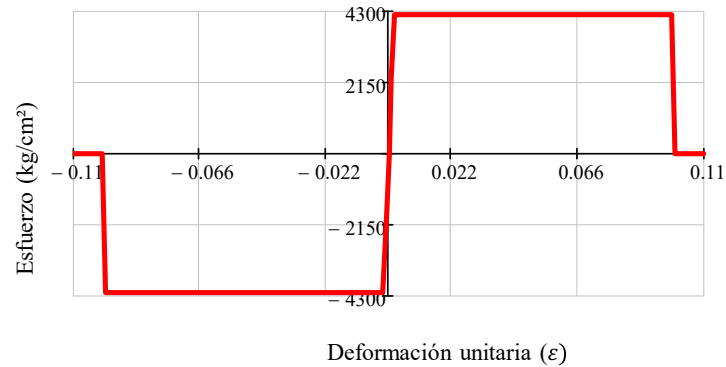
$$\varepsilon'_c = 0.002$$



### 3.3.2. MODELO CONSTITUTIVO DEL ACERO.

De acuerdo al ACI-318, el modelo constitutivo del acero, aplicable a esfuerzos de tensión y compresión, se obtiene con la ecuación 14 donde:

- El esfuerzo de fluencia del acero,  $F_y = 4218 \text{ kg/cm}^2$  (60 ksi).
- La deformación correspondiente al esfuerzo máximo,  $\epsilon_y = F_y / E_s$ .
- El módulo de Elasticidad para el acero,  $E = 2038901 \text{ kg/cm}^2$  (29,000ksi).



**Figura 29.** Relación  $\sigma$ - $\epsilon$  del acero,  $F_y = 4218 \text{ kgf/cm}^2$ .

La siguiente ecuación define la gráfica anterior, y aplica para la zona en tensión y compresión.

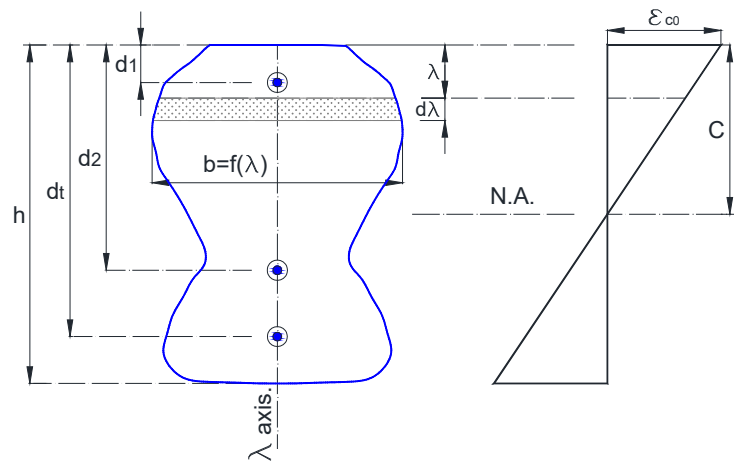
$$f_s = \begin{cases} E_s \cdot \epsilon & (\text{para } \epsilon < \epsilon_y) \\ F_y & (\text{para } \epsilon \geq \epsilon_y) \end{cases} \quad (14)$$

### 3.4. CALCULO DE LA RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA DE LA SECCIÓN.

#### 3.4.1. CALCULO DE LA RELACIÓN M- $\phi$ .

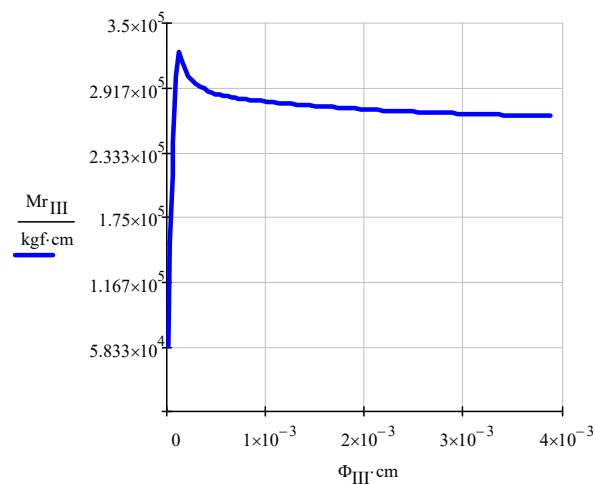
En el cálculo del diagrama M- $\phi$ , se utilizó un algoritmo desarrollado por Chávez, J.H (Carreira & Chu, Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression, ACI Journal., 1985), el cual desarrolla una serie de pasos para obtener resultados muy precisos, el algoritmo utiliza la función de ancho,  $b(\lambda)$ , de la sección transversal de la viga. A continuación, se describen algunos puntos importantes de este algoritmo.

- a) Se establece el rango de deformaciones unitarias de acuerdo a los criterios de las deformaciones de los materiales empleados. Para el concreto  $\epsilon_{c_{max}}=0.005$ , y del acero  $\epsilon_{s_{max}}=0.07$ .
- b) Para el cálculo de la posición del eje neutro, c, se obtiene mediante la información de las deformaciones unitarias descrito anteriormente, y el equilibrio de fuerzas que intervienen en el bloque de esfuerzo.



**Figura 30.** Sección simétrica y distribución de deformaciones.

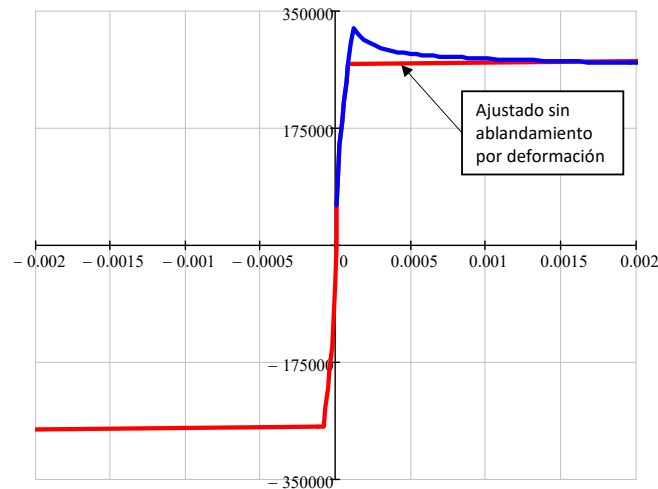
- c) Para obtener el diagrama de  $M-\phi$ , se utiliza la información calculada en los dos pasos anteriores. Se calculan los momentos internos del concreto y del acero de refuerzo utilizando los modelos constitutivos de ambos materiales.



**Figura 31.** Diagrama  $M-\phi$  utilizando el modelo Carreira-Chu + acero del ACI.

- d) En esta investigación no tomamos en cuenta el ablandamiento por deformación. Por tal motivo, limitamos al Momento máximo con el

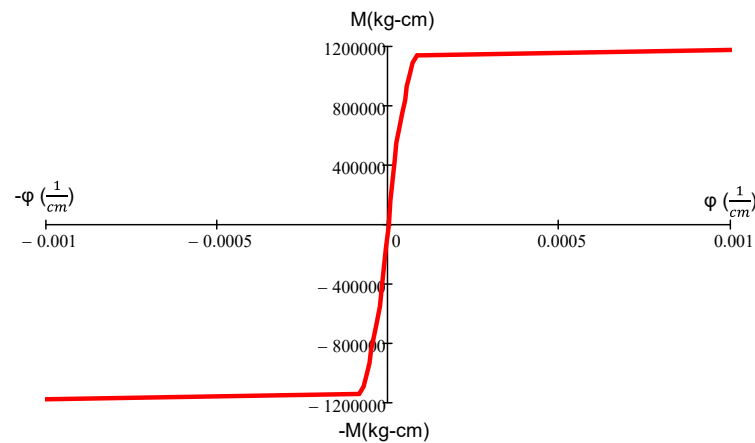
momento calculado con el ACI. Teniendo así un diagrama con comportamiento elasto-plástico.



**Figura 32.** Diagrama  $M-\phi$  ajustado sin ablandamiento por deformación.

Los diagramas  $M-\phi$ , representan directamente el comportamiento interno de los materiales empleados en la fabricación de vigas de CR. Y en nuestro caso, representa el comportamiento no lineal del acero y del concreto. A continuación se presentan los diagramas de  $M-\phi$  para el análisis de la viga simplemente apoyada y de las vigas continuas.

### 3.4.2. RELACIÓN M- $\phi$ PARA VIGA DE UN CLARO.

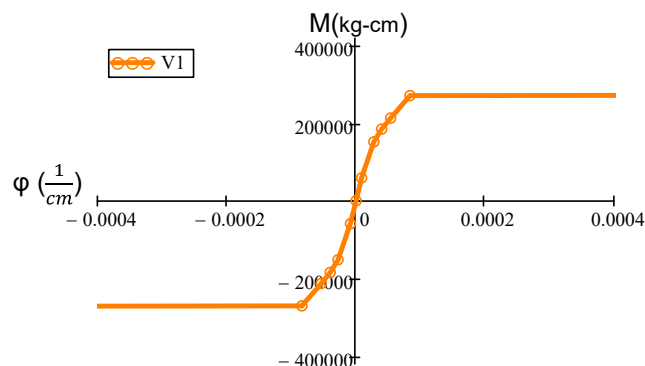


**Figura 33.** Diagrama M- $\phi$  elastoplástico para la viga de un claro.

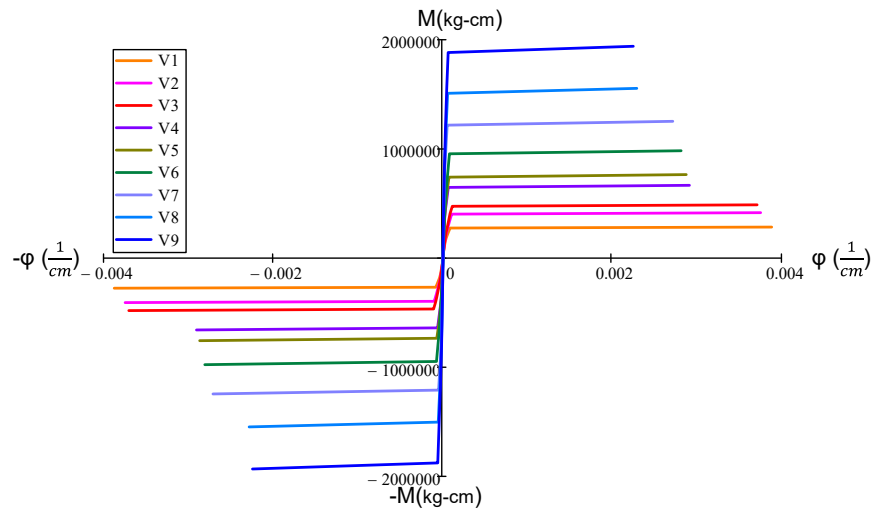
Como se ha mencionado anteriormente, el análisis de la viga simplemente apoyada se obtuvo de los modelos de ensayos realizado por E. Branson (Branson D. E., 1972), y cuyo resultado sirvió para realizar una comparativa entre la metodología que hemos desarrollado para el cálculo de las deflexiones en vigas de uno y más claros.

Para más detalle, la información de la sección transversal de la viga se encuentra definida en la sección 3.2.1.

### 3.4.3. RELACIÓN M- $\phi$ PARA LAS VIGAS CONTINUÚAS.



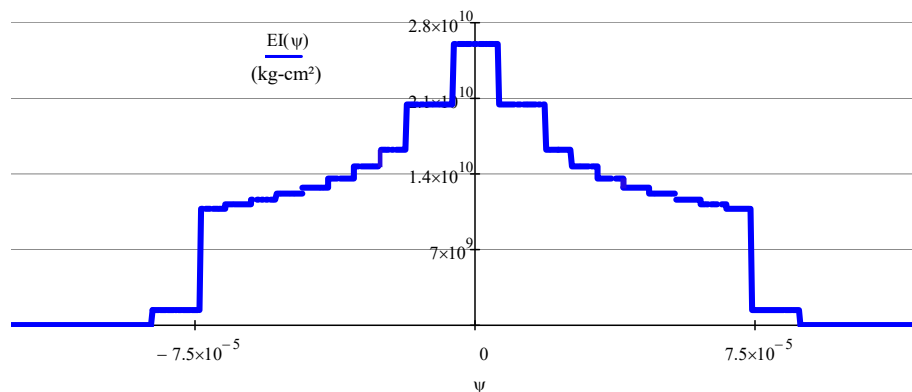
**Figura 34.** Diagrama M- $\phi$  elastoplástico de la viga V1.



**Figura 35.** Diagramas M- $\phi$  elastoplásticas para vigas continuas.

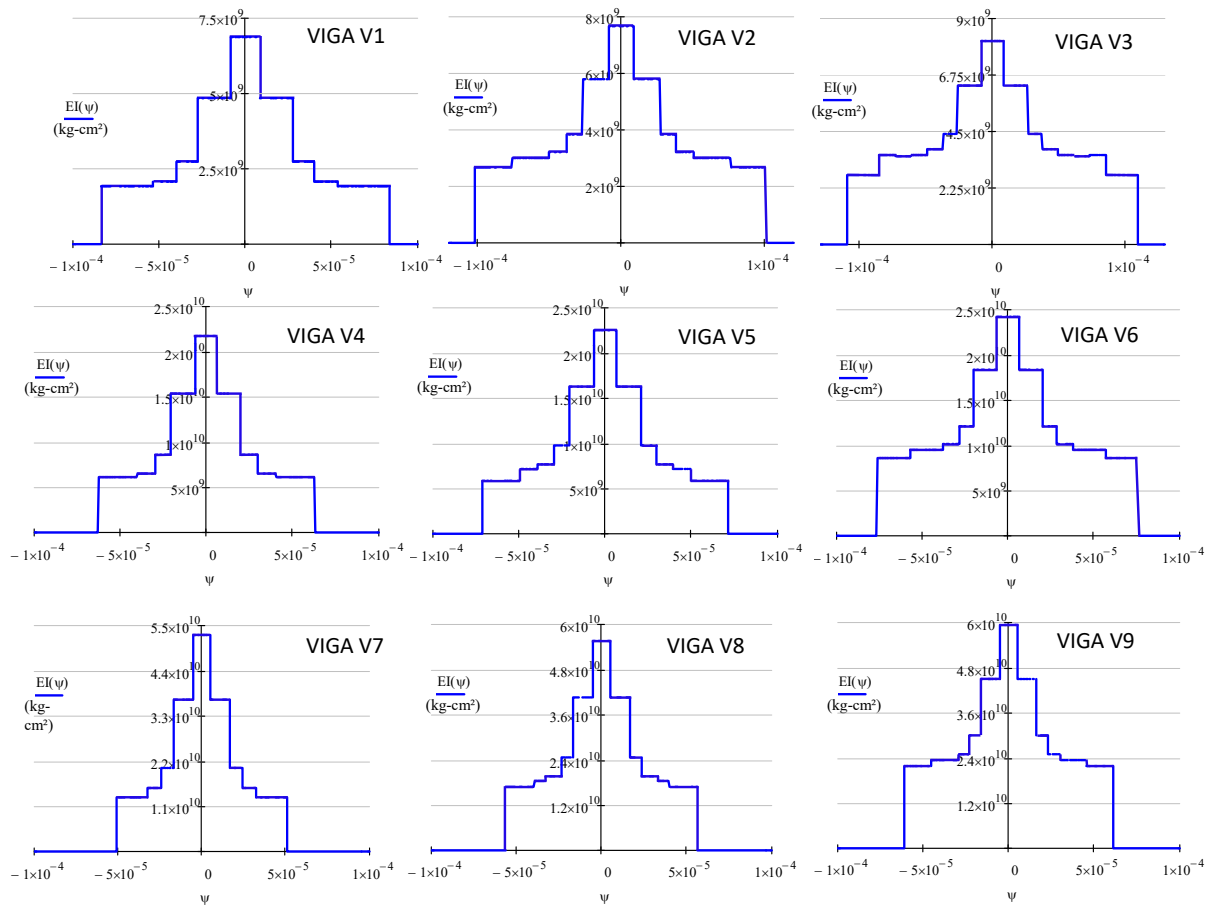
### 3.5. RIGIDEZ A LA FLEXIÓN.

Una manera sencilla de interpretar la magnitud de rigidez a flexión de un elemento, es mediante la gráfica de las pendientes ( $\Theta$ ) obtenida de derivar una vez la función de M- $\phi$ . En la **Figura 36**, se muestra los valores de las pendientes obtenida del diagrama M- $\phi$  de la viga VS-1.



**Figura 36.** Diagrama de las pendientes para la viga VS-1.

Para el caso de las secciones transversales de las vigas continuas, se presentan los resultados en las gráficas de la **Figura 37**.



**Figura 37.** Diagrama de las pendientes para las vigas continuas.

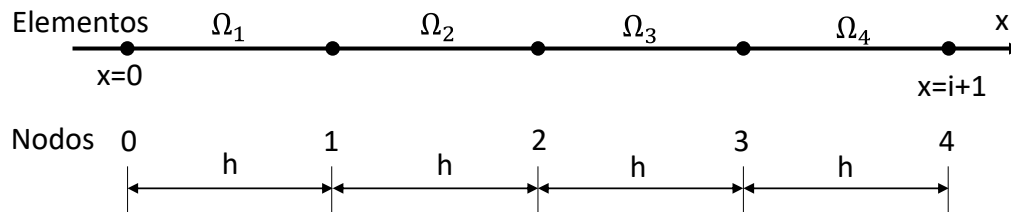
### 3.6. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA MATEMÁTICO

Para la solución de la EDO de cuarto orden se utiliza el MEF. Este método requiere, en un primer paso, la discretización del dominio de integración en una cantidad finita de subdominios, o elementos finitos.

#### 3.6.1. DISCRETIZACIÓN DE LA VIGA

Las vigas prototipos se discretiza en pequeños intervalos de longitud finita para tener una buena precisión. Algunos autores recomiendan que el tamaño mínimo de elementos sea mayor que el tamaño máximo del agregado grueso empleado en la elaboración del concreto (Mircea, Reimpresión 2006). Para nuestros prototipos de vigas utilizaremos longitudes de 5cm.

Cada subdominio está compuesto por dos nodos con longitud finita.



**Figura 38.** Discretización de la estructura.

**Tabla 2.** Discretización para diferentes claros de vigas continuas

LONGITUD DEL CLARO	Tamaño de los elementos ( $h$ )	Número de subelementos
500 cm	5 cm	100
600 cm	5 cm	120



### 3.6.2. FUNCIONES DE FORMA

El MEF utiliza funciones de interpolación para los desplazamientos transversales ( $y = f(x)$ ). Esta función se define mediante la superposición lineal de un conjunto finito de funciones base (funciones de forma). El conjunto de funciones base utilizadas en esta investigación se conocen como funciones Hermitianas. Estas funciones son polinomios algebraicos de tercer grado.

#### Funciones Hermitianas.

Estas funciones son ampliamente conocidas en el campo de la ingeniería estructural y tienen la propiedad de cumplir con la continuidad a la rotación y al desplazamiento transversal en sus dos nodos.

$$y_{interp} = \Psi_1 Y_a + \Psi_2 \theta_a + \Psi_3 Y_b + \Psi_4 \theta_b \quad (15)$$

Donde:

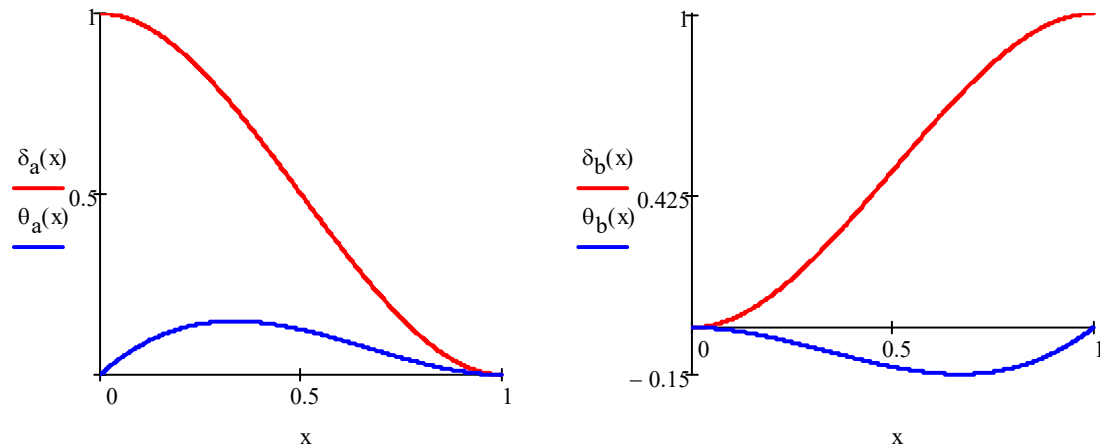
- $Y$  Es el desplazamiento transversal
- $\theta$  Es el desplazamiento rotacional.
- $a, b$  Son los nodos extremos del elemento.
- $\Psi_i$  Función Hermitiana i-ésima.

Las funciones Hermitianas son los polinomios algebraicos presentados en la ecuación 16.

$$\Psi(x, h_e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_e^3} (2x^2 - 3x^2 h_e + h_e^3) \\ \frac{1}{h_e^3} (x^3 h_e - 2x^2 h_e^2 + x h_e^3) \\ \frac{1}{h_e^3} (-2x^2 + 3x^2 h_e) \\ \frac{1}{h_e^3} (x^3 h_e - x^2 h_e^2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

[63]

En la Figura 39 se presentan gráficamente estas funciones. Existen otros conjuntos de funciones bases posibles, pero en esta investigación se decidió utilizar las funciones Hermitianas.



**Figura 39.** Gráfica de las funciones Hermitianas, donde a y b son los nodos extremos del elemento.

### 3.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA VIGA.

En una sección compuesta por un solo material, la rigidez a flexión se define como el producto del módulo de Young del material ( $E$ ) por la inercia de la sección de la viga ( $I$ ) =  $E.I$ . Esta definición es aplicable únicamente para materiales de comportamiento elástico lineales. En el caso de las vigas de concreto reforzado la rigidez a flexión debe obtenerse directamente del diagrama  $M-\phi$ , para la curvatura correspondiente.

Por otro lado, al aplicar el incremento de carga ( $\Delta_w$ ) sobre la longitud de la viga, se tiene una reducción gradual de la rigidez a flexión, tal como se puede observar en gráficas de la **Figura 41**. Por ejemplo, Al aumentar la curvatura se

alcanzará eventualmente la condición conocida como articulación plástica, en zonas donde se presentan los momentos máximos.

Para obtener la matriz de rigidez de cada elemento se utiliza la ecuación 15, esta ecuación contiene información de las rigideces a flexión. La integración se realiza mediante la *Cuadratura de Gauss-Legendre*.

$$K_{i,j} = \int_0^{h_e} \left\{ \left[ (EI_a) \left( 1 - \frac{x}{h_e} \right) + (EI_b) \left( \frac{x}{h_e} \right) \right] \frac{d^2\Psi(x, h_e)_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi(x, h_e)_j}{dx^2} \right\} dx \quad (15)$$

Dónde:

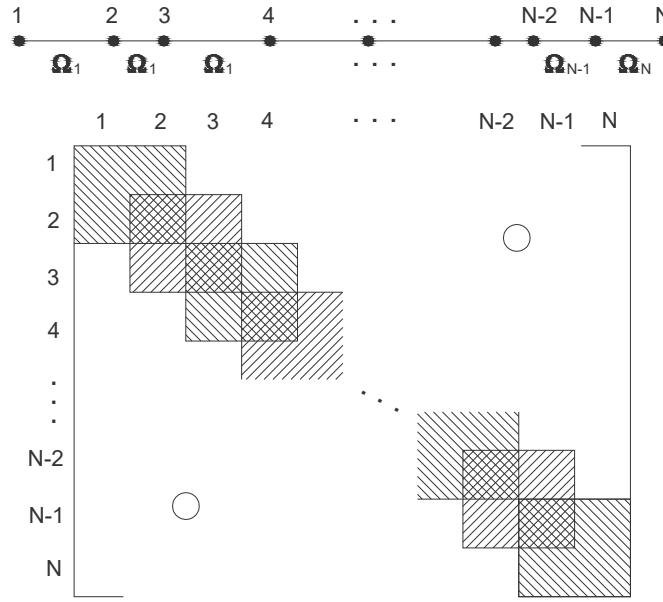
$\Psi(x, h_e)$  Funciones de forma (Hermitianas).

$h_e$  Es la longitud del elemento finito.

$EI_a, EI_b$  Son las rigideces a flexión en los extremos a y b de un elemento finito, correspondientes a la magnitud de la curvatura para el nivel de carga actual.

Se decidió realizar una aproximación a los valores de la rigidez a flexión instantánea mediante una interpolación lineal, basada en las rigideces instantáneas de los nodos extremos del elemento finito.

La matriz de rigidez de la viga, **[K]**, contiene la información de cada uno de los elementos finitos y se obtiene mediante el ensamble de las matrices de cada elemento finito. La matriz de la viga es de  $n$  renglones y  $n$  columnas, como se muestra en la **Figura 40**.



**Figura 40.** Malla de N nodos y N-1 elementos y matriz de coeficientes en la que se ha representado la contribución de los elementos (Becker, Carey, & Oden, 1981) página 77.

### 3.8. MATRIZ DE FUERZAS DE LA VIGA.

Como es conocido, la distribución de la carga sobre la viga afecta la configuración deformada. Los componentes de la matriz de fuerza se evalúan mediante la ecuación 19.

$$F_{e_i} = \int_0^{h_e} W_e \cdot \Psi(x, h_e)_i dx \quad (19)$$

Donde:

$h_e$ : es la longitud del elemento finito.

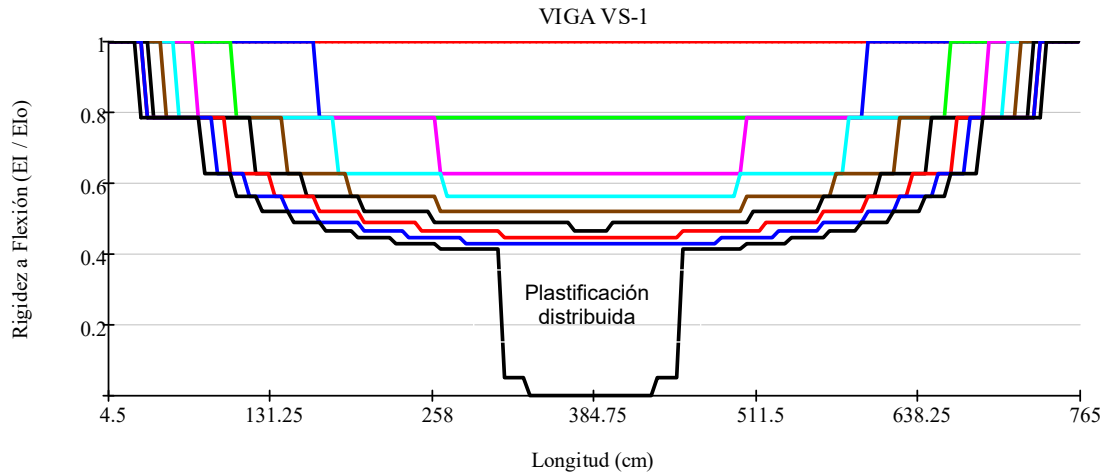
$W_e$  Es la función de carga transversal externa actuando sobre el elemento finito.

### 3.9. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL DE EQUILIBRIO DE LA VIGA.

La metodología propuesta en esta investigación, fue desarrollada para resolver la ecuación diferencial de segundo orden  $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_x} \dots ec.1\right)$ , esta ecuación es altamente no lineal debido a que la rigidez de la viga cambia constantemente al ir incrementando gradualmente la carga. La técnica de solución utilizada es el MEF para elementos tipo barra.

Para obtener la carga última de colapso, se recurre a realizar incrementos graduales de cargas, con la finalidad de ir monitoreando los cambios de rigidez de las secciones a lo largo de la viga. Cuando la rigidez es cercana o igual a cero en uno o más zonas de la viga, decimos que hemos encontrado la carga que genera la falla en la viga.

En la **Figura 41**, se muestran algunos diagramas de rigidez a flexión de una viga sometida a diez incrementos de carga. Conforme aumenta la carga, se observa una plastificación distribuida del material en la mayor parte de la viga. Caso contrario a lo que se conoce actualmente en el análisis plástico, donde la plastificación del material ocurre en puntos concentrados dentro de la viga.



**Figura 41.** Diagrama de Rigidez a Flexión de una viga simplemente apoyada.

Para el análisis no lineal se realiza una corrección de la rigidez a flexión de la viga, utilizando el historial de la rigidez a flexión de las secciones a lo largo de la viga.

La solución de la ecuación diferencial de segundo grado, se resuelve con la expresión:

$$\Delta D_u = [K_{beam}(\varphi)]^{-1} \cdot [F_{beam}(\Delta W)] \quad (17)$$

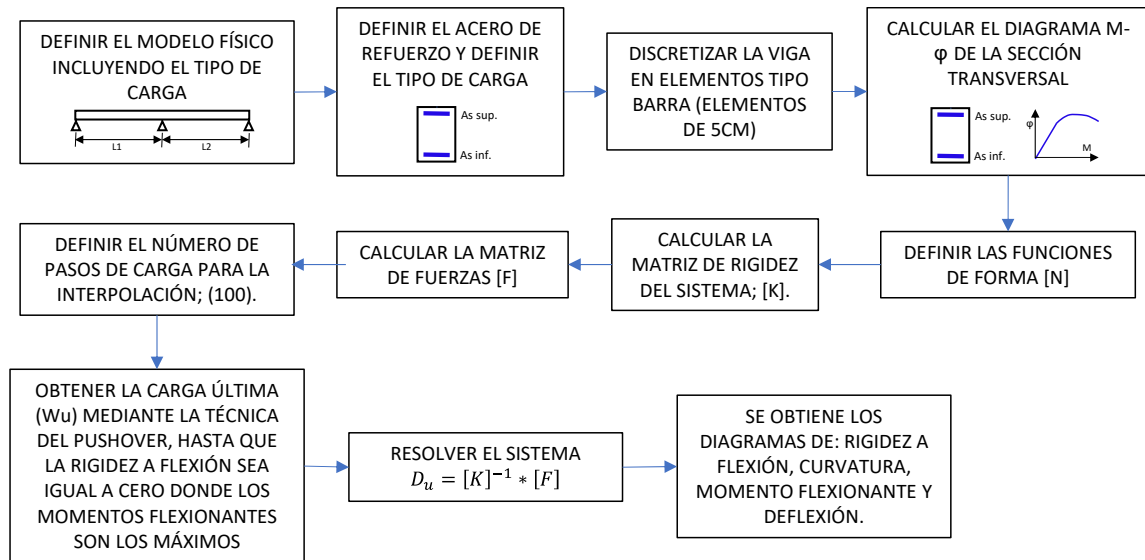
Donde:

$\Delta D_u$ : Es el incremento de los desplazamientos causados por el incremento en las fuerzas externas.

$K_{beam}(\varphi)$ ; Es la matriz de rigidez global de la viga que está en función de la rigidez a flexión instantánea ( $\varphi$ ) de la viga.

$F_{beam}(\Delta W)$ ; Es el vector de fuerzas en función del incremento de la carga.

### 3.10. DIAGRAMA DE FLUJO DE LA METODOLOGÍA



## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a los problemas planteados en la sección 3.2 para el cálculo de las deflexiones inmediatas. Se analizaron vigas de CR de uno, dos y tres claros, con cargas uniformemente distribuida a lo largo de la viga. Estos resultados se comparan con la metodología propuesta por el ACI435r-95 para vigas de uno o más claros.

Los resultados obtenidos del análisis de las vigas son representados mediante gráficos normalizados para su mejor manejo e interpretación. La normalización se encuentra en los rangos de +1.0 y -1.0.

- a) Para la normalización del diagrama de la rotación: es la rotación del paso de carga-iesima dividido entre la rotación al inicio del rango plástico ( $\phi/\phi_p$ ) obtenido del diagrama de M- $\phi$ .
- b) Para la normalización del diagrama de la rigidez a flexión: es la rigidez a flexión del paso de carga-iesima, dividido entre la rigidez a flexión inicial ( $EI/EI_0$ ) obtenido del diagrama de M- $\phi$ .



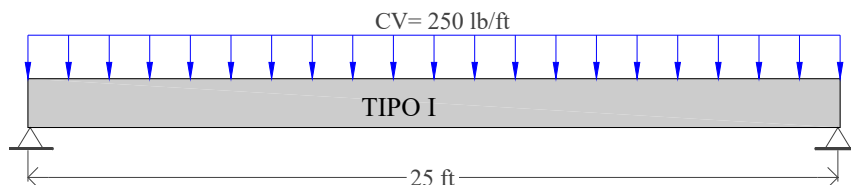
- c) Para la normalización del diagrama del momento flexionante ( $M/M_u$ ): es el momento a flexión del paso de carga-iesima, dividido entre el momento último obtenido del diagrama de  $M-\phi$ .
- d) Los diagramas de las deflexiones no se encuentran normalizados, la magnitud de deformación se presenta en centímetros.

El algoritmo desarrollado en esta investigación, trabaja mediante la aplicación de **100 pasos de cargas**, con la finalidad de obtener resultados más precisos. Para evitar que se saturen todos los gráficos, solo se registraron 10 pasos de cargas, escalados a cada 10% de  $W_u$ .

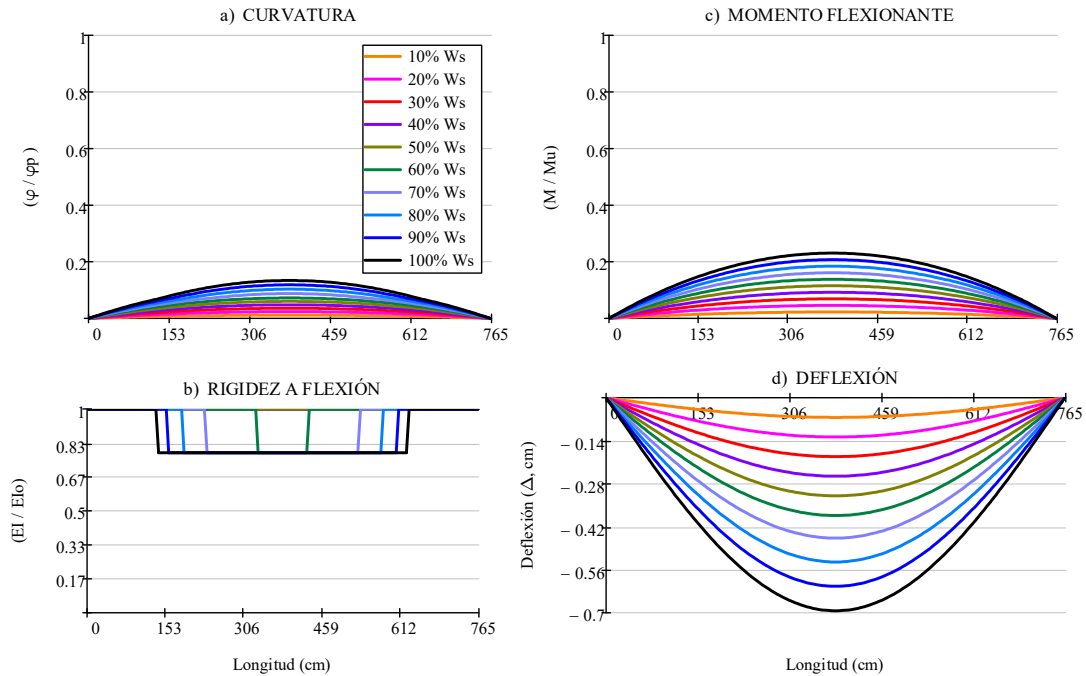
#### 4.1. RESULTADOS DE LA VIGA TIPO I.

Para la viga simplemente apoyada, los resultados obtenidos con la metodología de esta investigación (*MEF con RNLM*), son muy similares a los resultados que se obtienen con la metodología de Branson. Para esto, se analizaron algunas vigas simplemente apoyadas con refuerzo inferior y cargas de servicio.

A continuación se presenta los resultados obtenidos con la metodología propuesta en esta investigación.



**Figura 42.** Prototipo de viga de un claro, con carga uniformemente distribuida.



**Figura 43.** Gráficas de la viga VS-1, Tipo I ( $W_s = 3.72 \text{ kg/cm}$ ).

## 4.2. RESULTADOS DE LAS VIGAS TIPO II.

Se analizaron nueve vigas continuas de CR con diferentes secciones transversales (Ver **Figura 27**), con la finalidad de identificar alguna diferencia significativa por el hecho de ir cambiando los porcentajes de acero de refuerzo.

Esta metodología tiene como propósito fundamental, resolver vigas continuas de dos o más claros sometidos a cargas últimas de colapso. La aplicación de la carga, consiste en aplicar 100 incrementos graduales de cargas ( $\Delta_w$ ), hasta alcanzar el 100% de la carga última ( $W_u$ ).

En la Tabla 3, se registran solo 10 pasos de cargas que varían cada 10% hasta alcanzar la carga  $W_u$ .

Tabla 3. Cargas  $W$  aplicadas sobre la viga tipo II.

$\Delta_W$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
100% $W_u$	13.339	19.617	22.962	31.665	36.305	46.500	59.750	74.290	92.435
90% $W_u$	12.005	17.655	20.666	28.499	32.675	41.850	53.775	66.861	83.192
80% $W_u$	10.671	15.694	18.370	25.332	29.044	37.200	47.800	59.432	73.948
70% $W_u$	9.337	13.732	16.073	22.166	25.414	32.550	41.825	52.003	64.705
60% $W_u$	8.003	11.770	13.777	18.999	21.783	27.900	35.850	44.574	55.461
50% $W_u$	6.670	9.809	11.481	15.833	18.153	23.250	29.875	37.145	46.218
40% $W_u$	5.336	7.847	9.185	12.666	14.522	18.600	23.900	29.716	36.974
30% $W_u$	4.002	5.885	6.889	9.500	10.892	13.950	17.925	22.287	27.731
20% $W_u$	2.668	3.923	4.592	6.333	7.261	9.300	11.950	14.858	18.487
10% $W_u$	1.334	1.962	2.296	3.167	3.631	4.650	5.975	7.429	9.244
Las cargas $W$ , son cargas uniformemente distribuida expresados en [kg/cm]									

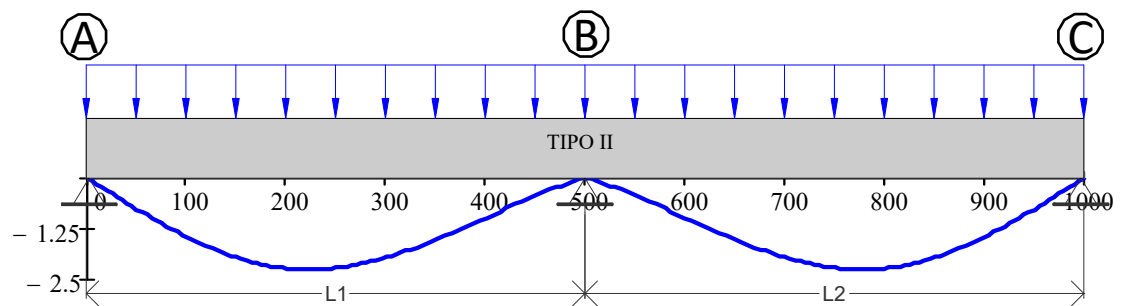
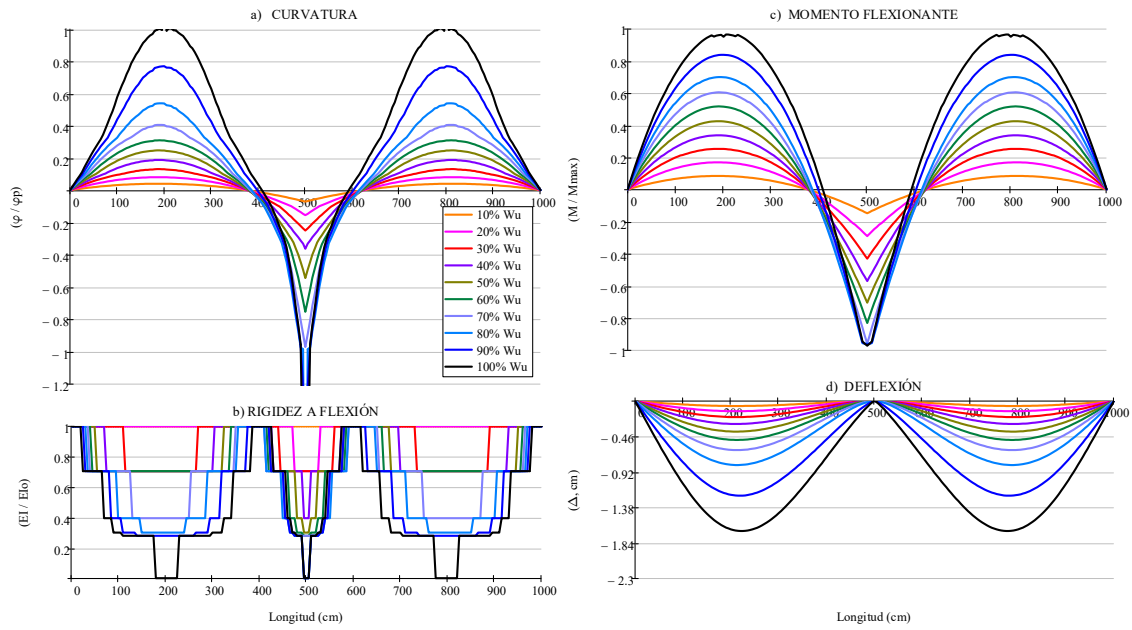
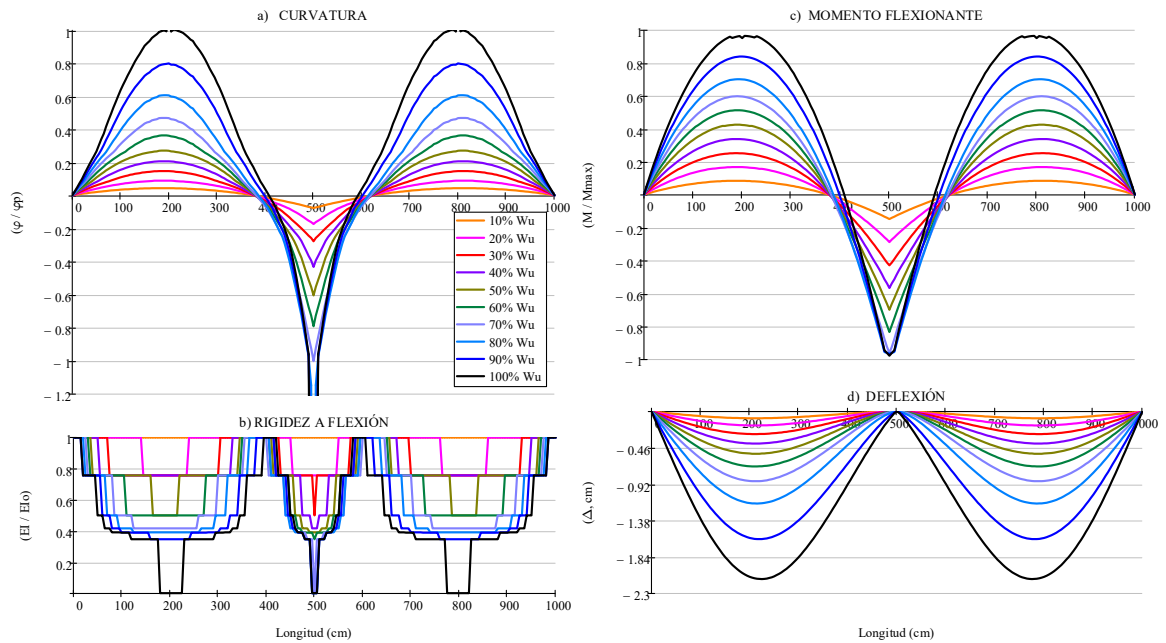


Figura 44. Viga tipo II, con carga uniformemente distribuida.

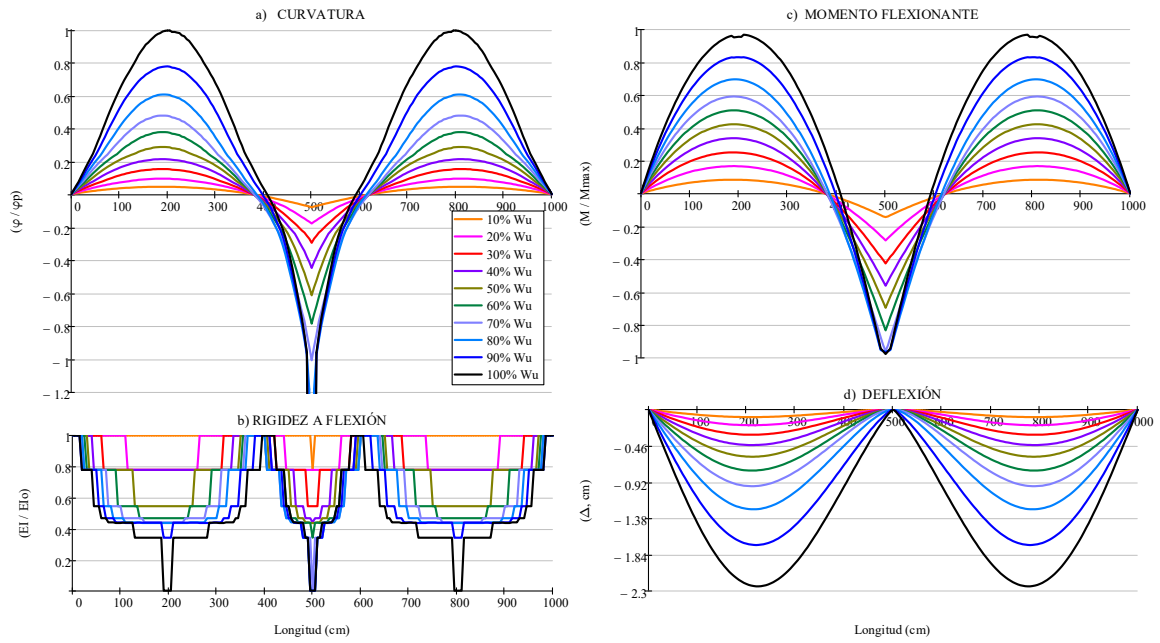
Las ubicaciones de los puntos críticos donde ocurren las máximas magnitudes de; la curvatura, rigidez a flexión, momento flexionante y deflexión, ocurren en las zonas centrales (225 cm y 775 cm) y en el apoyo central (500 cm).



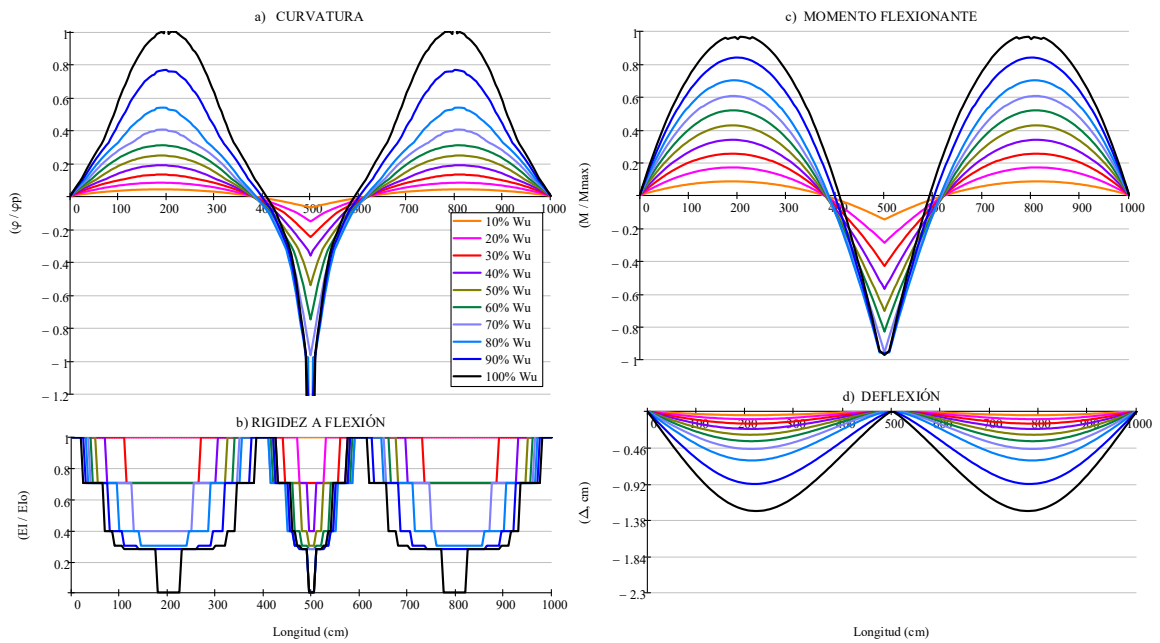
**Figura 45.** Gráficas de la viga V1, Tipo II ( $W_u = 13.339 \text{ kg/cm}$ ).



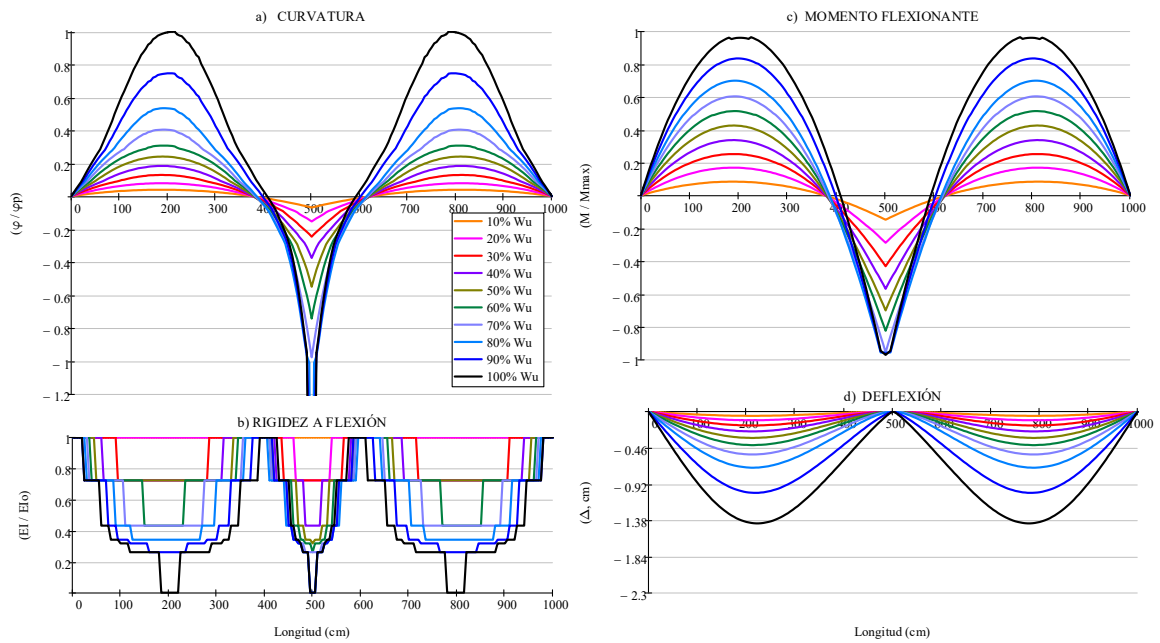
**Figura 46.** Gráficas de la viga V2, Tipo II ( $W_u = 19.617 \text{ kg/cm}$ ).



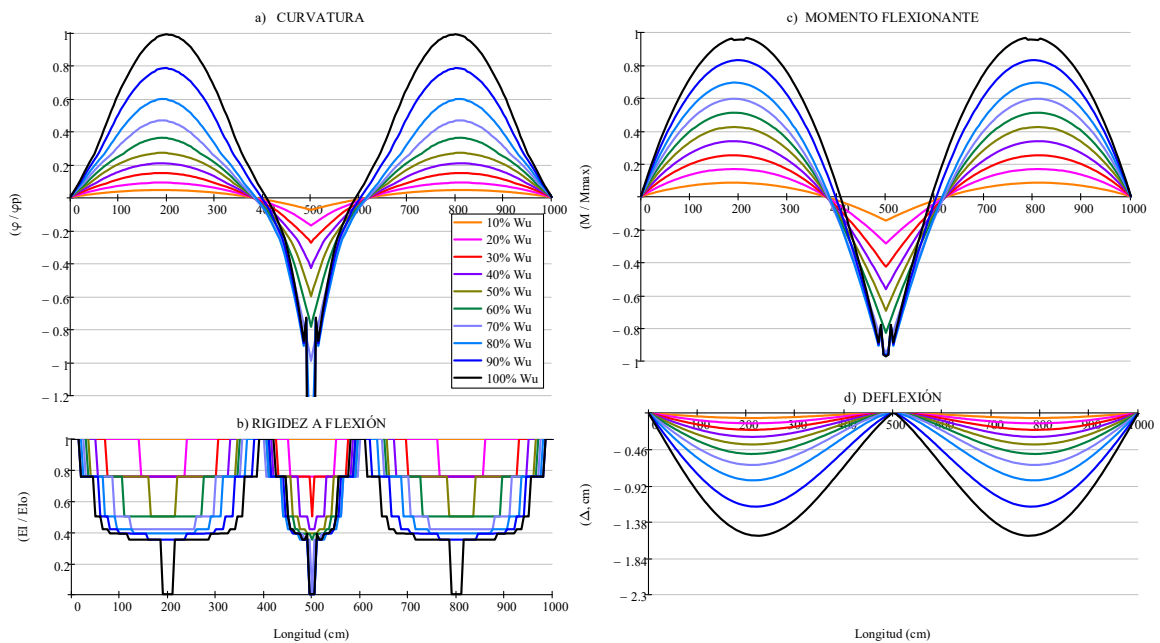
**Figura 47.** Gráficas de la viga V3, Tipo II ( $W_u = 22.962 \text{ kg/cm}$ ).



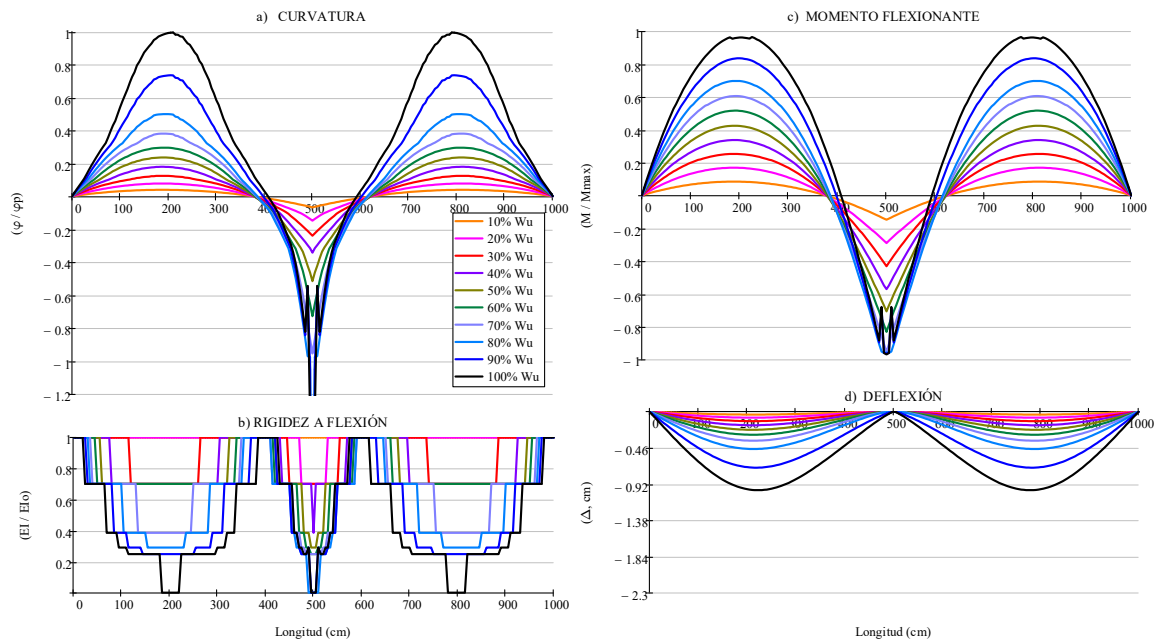
**Figura 48.** Gráficas de la viga V4, Tipo II ( $W_u = 31.665 \text{ kg/cm}$ ).



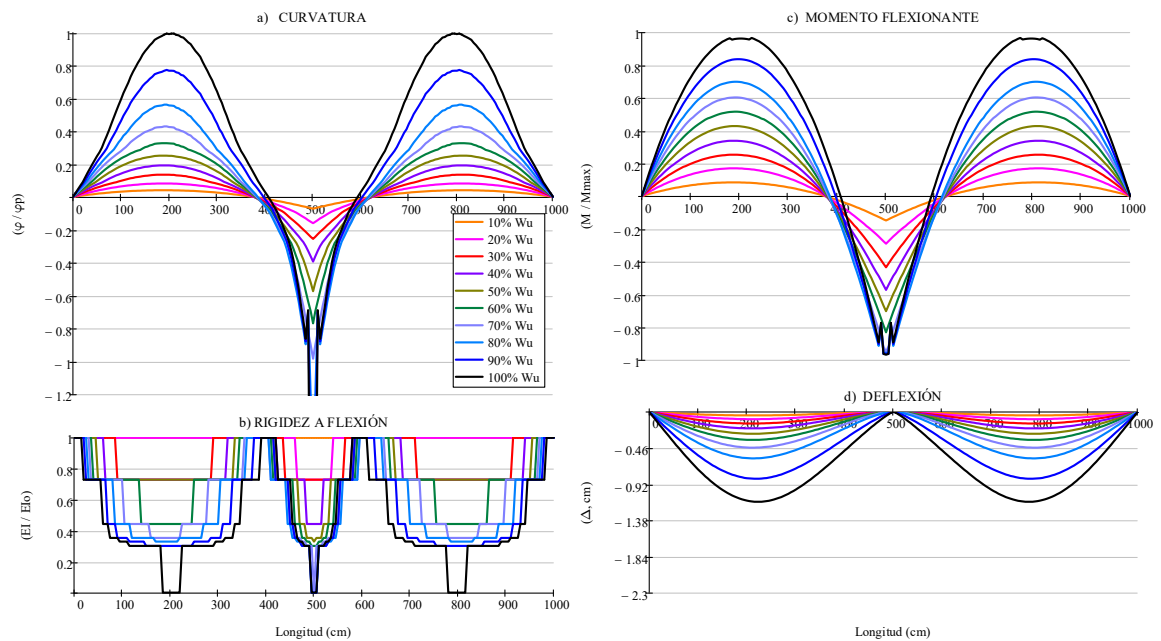
**Figura 49.** Gráficas de la viga V5, Tipo II ( $W_u = 36.305 \text{ kg/cm}$ ).



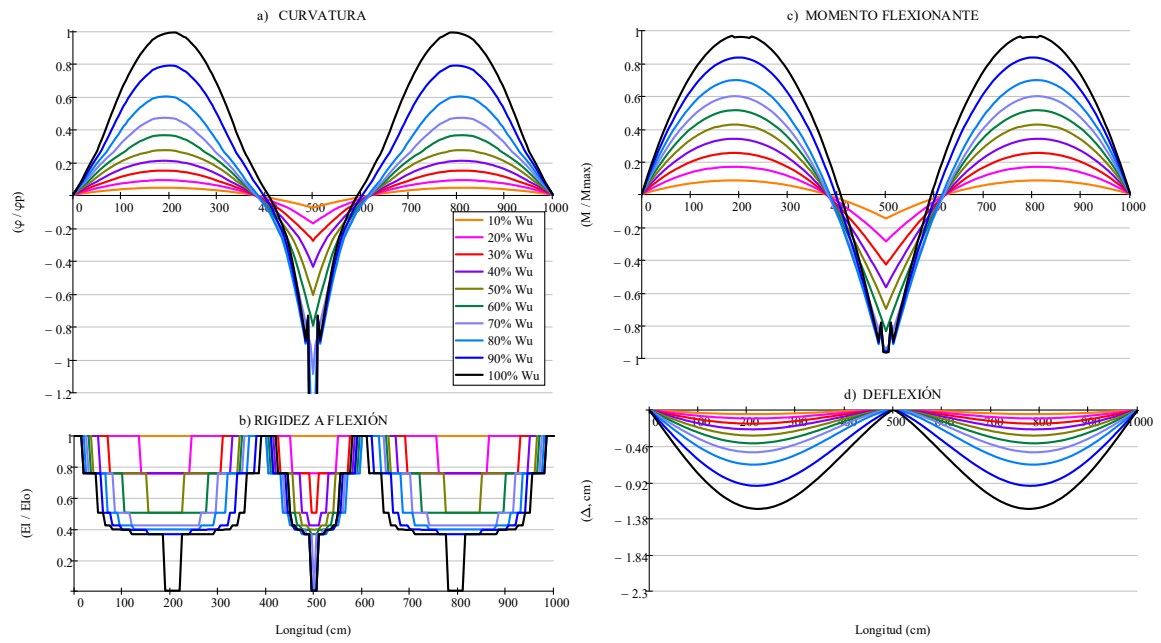
**Figura 50.** Gráficas de la viga V6, Tipo II ( $W_u = 46.5 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 51.** Gráficas de la viga V7, Tipo II ( $W_u = 59.75 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 52.** Gráficas de la viga V8, Tipo II ( $W_u = 74.29 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 53.** Gráficas de la viga V9, Tipo II ( $W_u = 92.435 \text{ kg/cm}$ ).

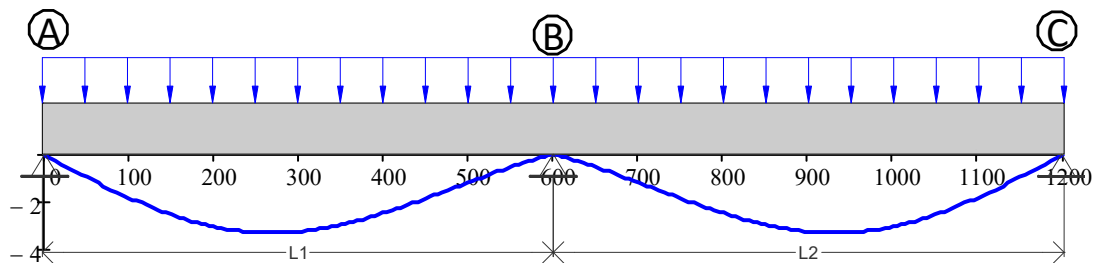


### 4.3. RESULTADOS DE LAS VIGAS TIPO III.

Para las vigas tipo III, fueron analizadas nueve vigas de CR con diferentes secciones transversales (Ver **Figura 27**). La viga fue sometida a 100 incrementos de cargas ( $\Delta W$ ), hasta alcanzar el 100% de la carga última ( $W_u$ ). La siguiente tabla muestra el registro de 10  $\Delta W$ .

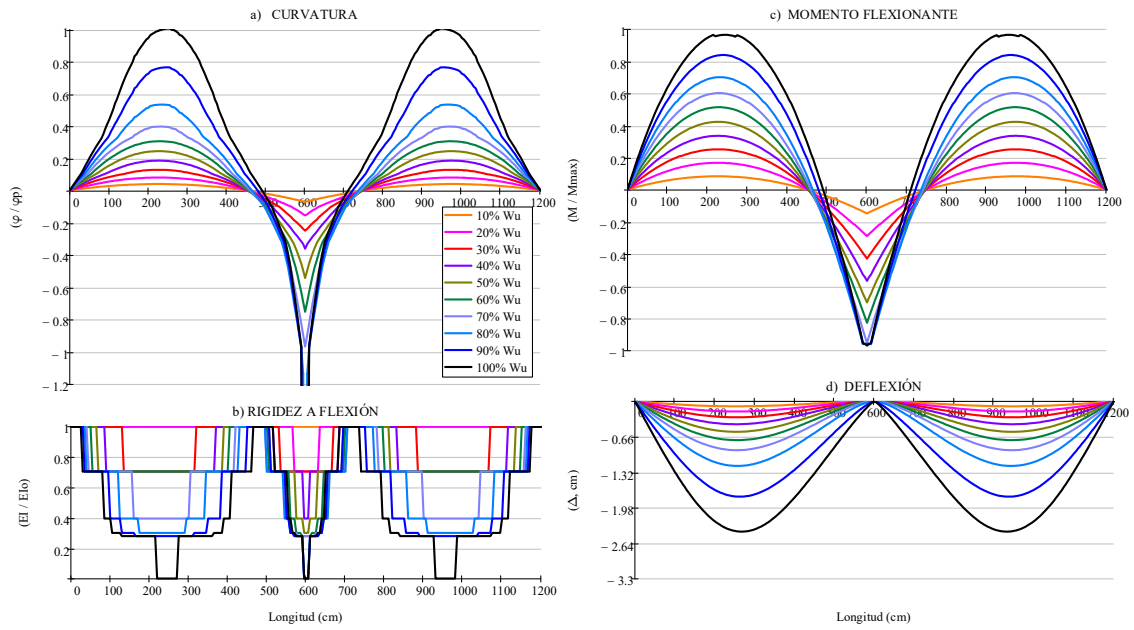
Tabla 4. Cargas W aplicadas sobre la viga tipo III.

$\Delta W$ .	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
100% $W_u$	9.220	13.575	16.019	21.900	25.406	32.410	41.370	51.110	63.800
90% $W_u$	8.298	12.218	14.417	19.710	22.865	29.169	37.233	45.999	57.420
80% $W_u$	7.376	10.860	12.815	17.520	20.325	25.928	33.096	40.888	51.040
70% $W_u$	6.454	9.503	11.213	15.330	17.784	22.687	28.959	35.777	44.660
60% $W_u$	5.532	8.145	9.611	13.140	15.244	19.446	24.822	30.666	38.280
50% $W_u$	4.610	6.788	8.010	10.950	12.703	16.205	20.685	25.555	31.900
40% $W_u$	3.688	5.430	6.408	8.760	10.162	12.964	16.548	20.444	25.520
30% $W_u$	2.766	4.073	4.806	6.570	7.622	9.723	12.411	15.333	19.140
20% $W_u$	1.844	2.715	3.204	4.380	5.081	6.482	8.274	10.222	12.760
10% $W_u$	0.922	1.358	1.602	2.190	2.541	3.241	4.137	5.111	6.380
<i>Las cargas W, son cargas uniformemente distribuida expresados en [kg/cm]</i>									

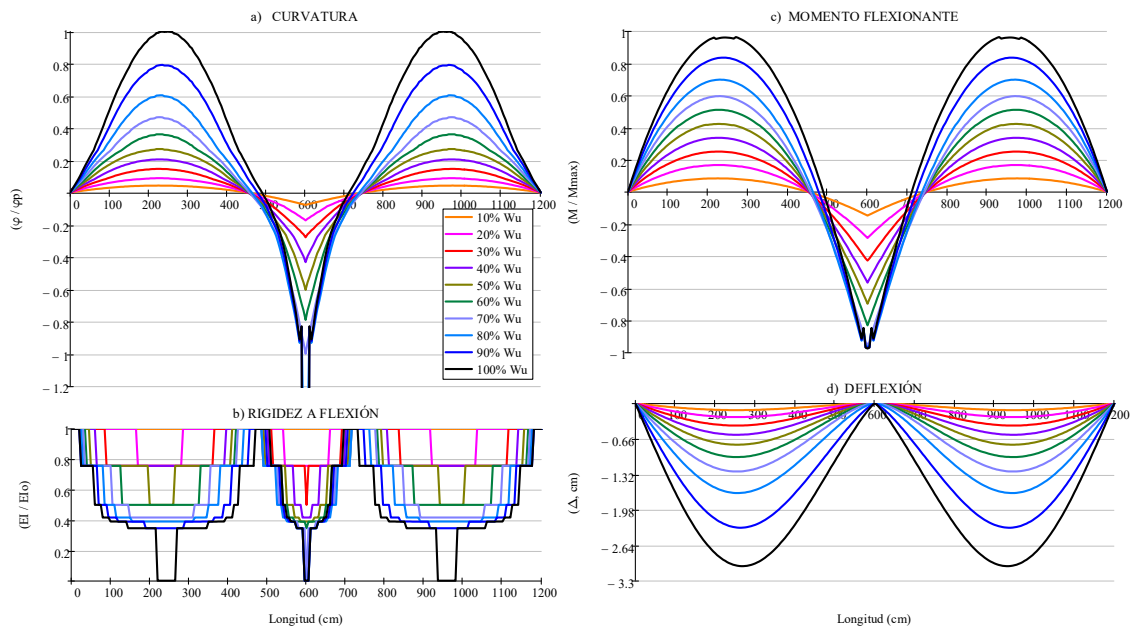


**Figura 54.** Viga tipo III, carga uniformemente distribuida..

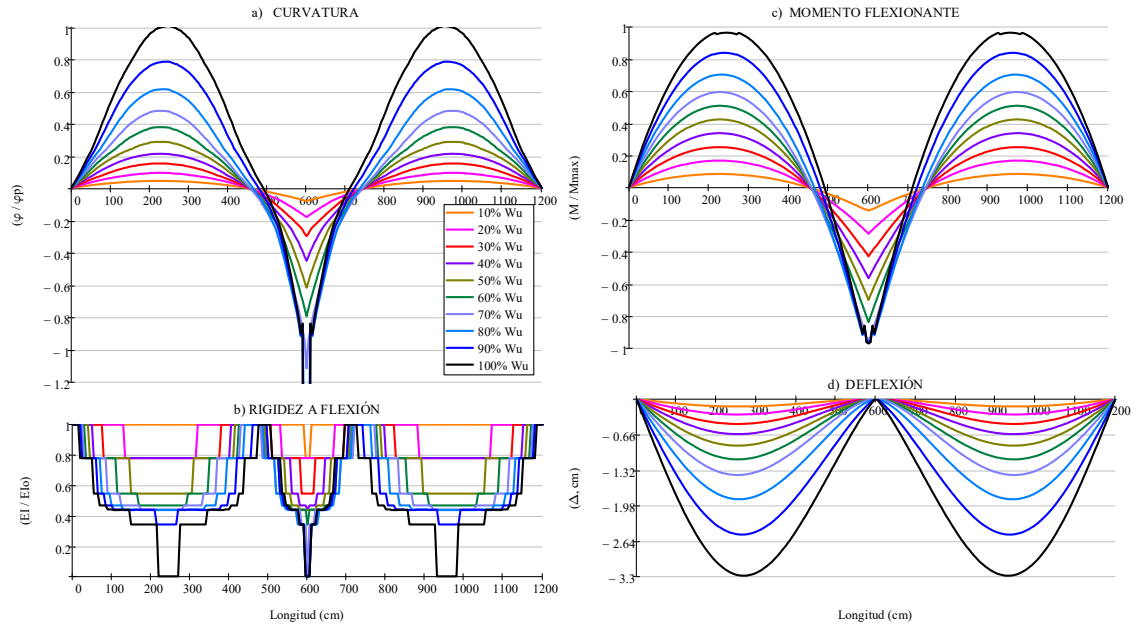
Las ubicaciones de los puntos críticos donde ocurren las máximas magnitudes de; la curvatura, rigidez a flexión, momento flexionante y deflexión, ocurren en las zonas centrales (270 cm y 930 cm) y en apoyo central (600 cm).



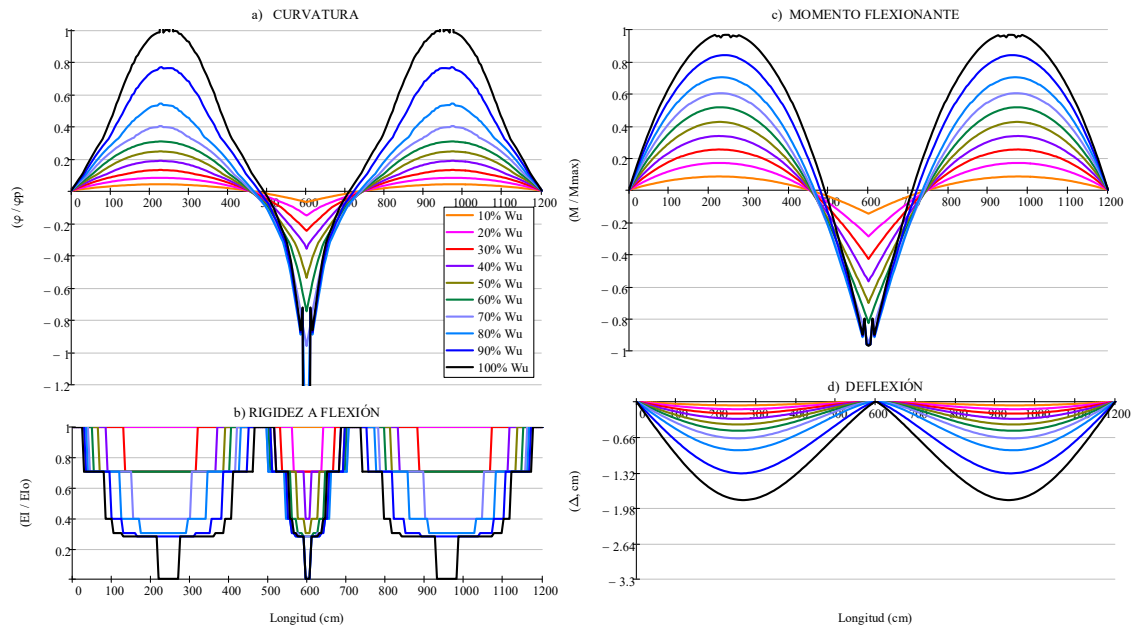
**Figura 55.** Gráficas de la viga V1, Tipo III ( $W_u = 9.22 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 56.** Gráficas de la viga V2, Tipo III ( $W_u = 13.575 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 57.** Gráficas de la viga V3, Tipo III ( $W_u = 16.019 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 58.** Gráficas de la viga V4, Tipo III ( $W_u = 21.9 \text{ kg/cm}$ ).

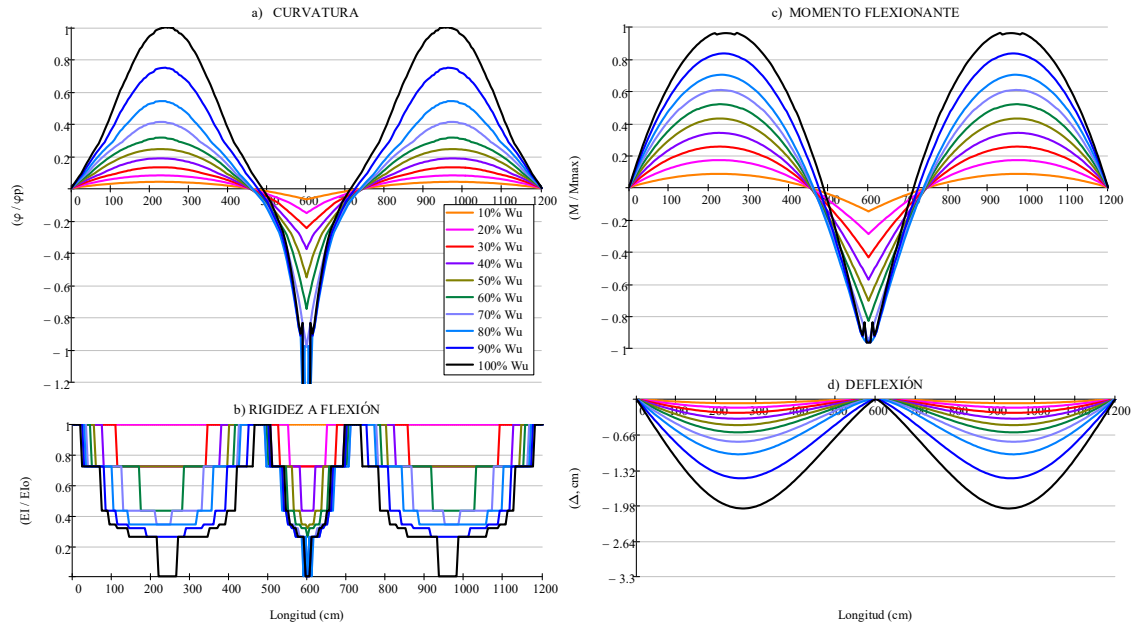


Figura 59. Gráficas de la viga V5, Tipo III ( $W_u = 25.406 \text{ kg/cm}$ ).

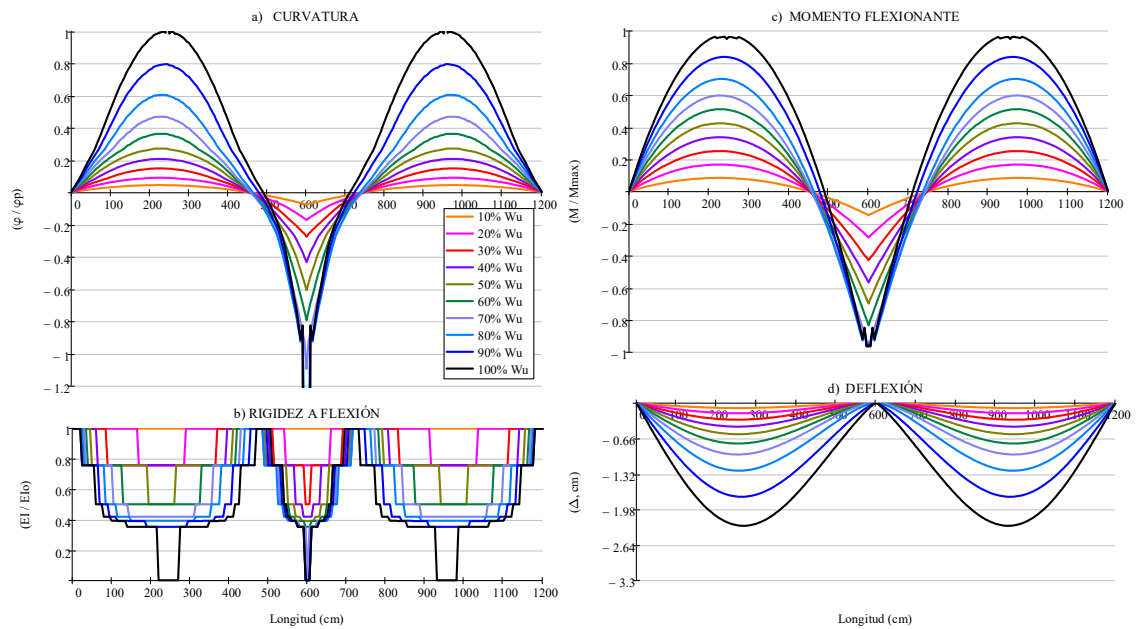
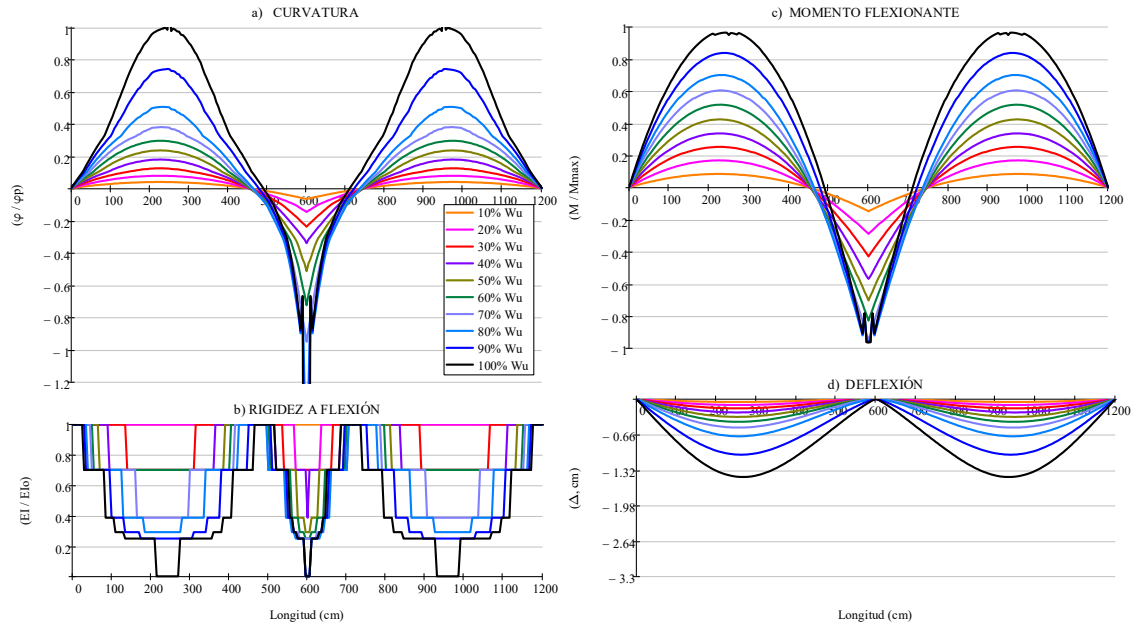
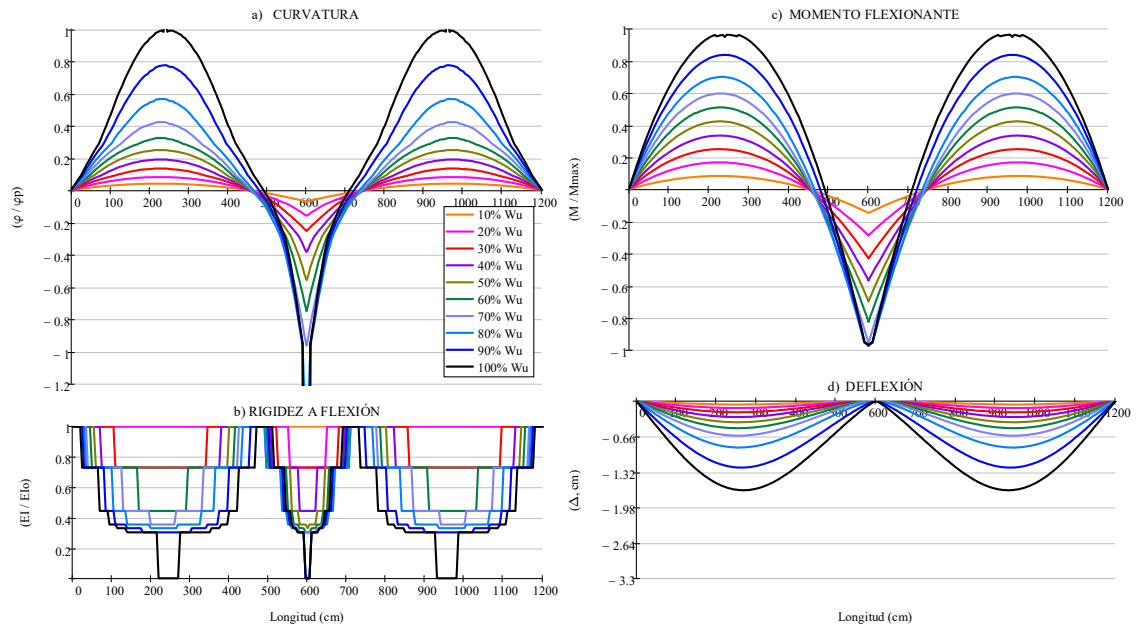


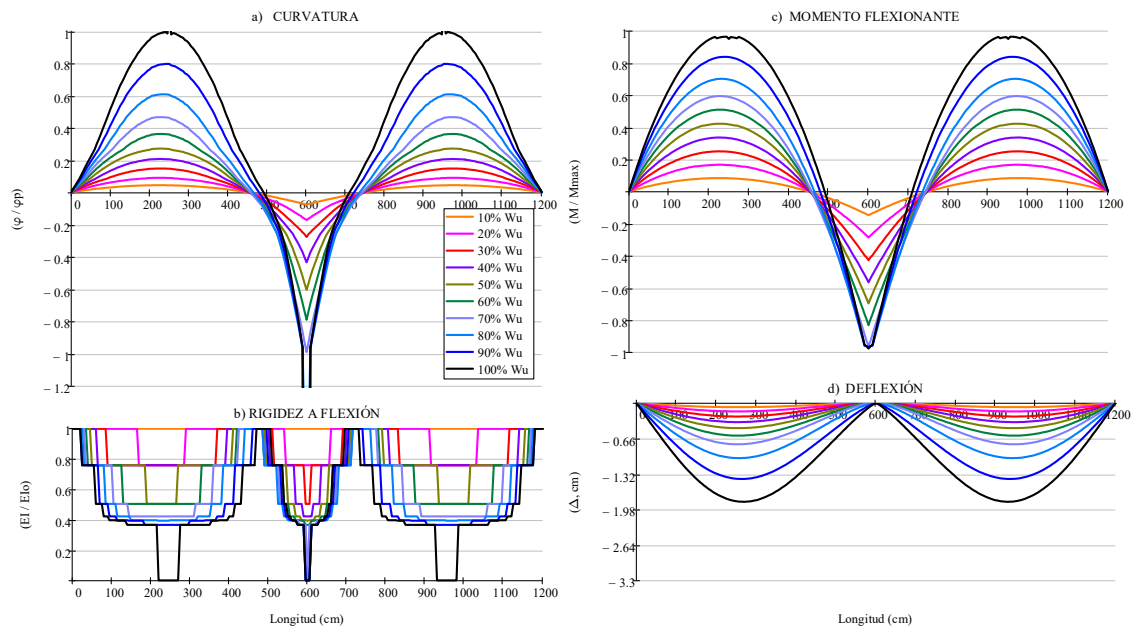
Figura 60. Gráficas de la viga V6, Tipo III ( $W_u = 32.41 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 61.** Gráficas de la viga V7, Tipo III ( $W_u = 41.37 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 62.** Gráficas de la viga V8, Tipo III ( $W_u = 51.11 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 63.** Gráficas de la viga V9, Tipo III ( $W_u = 63.80 \text{ kg/cm}$ ).

#### 4.4. RESULTADOS PARA LAS VIGAS TIPO IV.

Se analizaron nueve vigas de CR, estas vigas son vigas continuas de tres claros iguales. Se aplicaron incrementos graduales de cargas ( $\Delta W$ ), hasta alcanzar la carga  $W_u$ .

Tabla 5. Cargas W aplicadas sobre la viga tipo IV.

$\Delta W$	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
100% $W_u$	13.306	19.540	23.030	31.590	36.150	46.560	59.440	73.920	91.920
90% $W_u$	11.975	17.586	20.727	28.431	32.535	41.904	53.496	66.528	82.728
80% $W_u$	10.645	15.632	18.424	25.272	28.920	37.248	47.552	59.136	73.536
70% $W_u$	9.314	13.678	16.121	22.113	25.305	32.592	41.608	51.744	64.344
60% $W_u$	7.984	11.724	13.818	18.954	21.690	27.936	35.664	44.352	55.152
50% $W_u$	6.653	9.770	11.515	15.795	18.075	23.280	29.720	36.960	45.960
40% $W_u$	5.322	7.816	9.212	12.636	14.460	18.624	23.776	29.568	36.768
30% $W_u$	3.992	5.862	6.909	9.477	10.845	13.968	17.832	22.176	27.576
20% $W_u$	2.661	3.908	4.606	6.318	7.230	9.312	11.888	14.784	18.384
10% $W_u$	1.331	1.954	2.303	3.159	3.615	4.656	5.944	7.392	9.192
<i>Las cargas W, son cargas uniformemente distribuida expresados en [kg/cm]</i>									

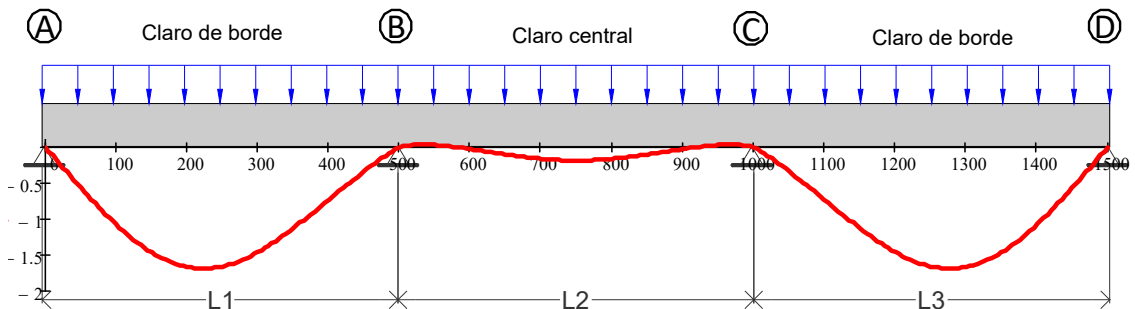
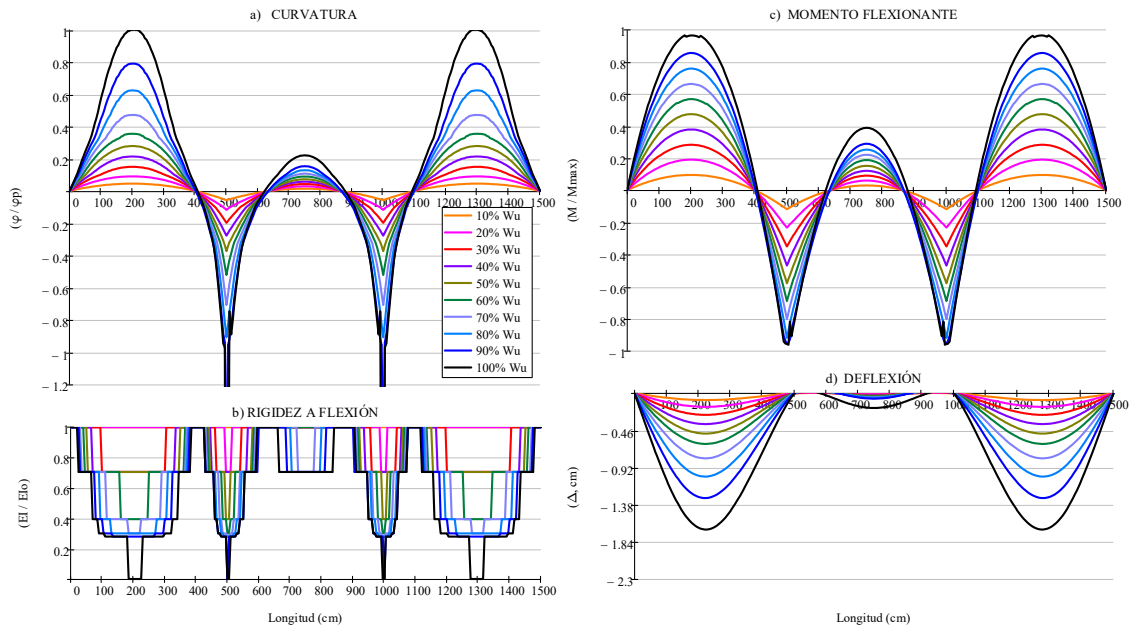
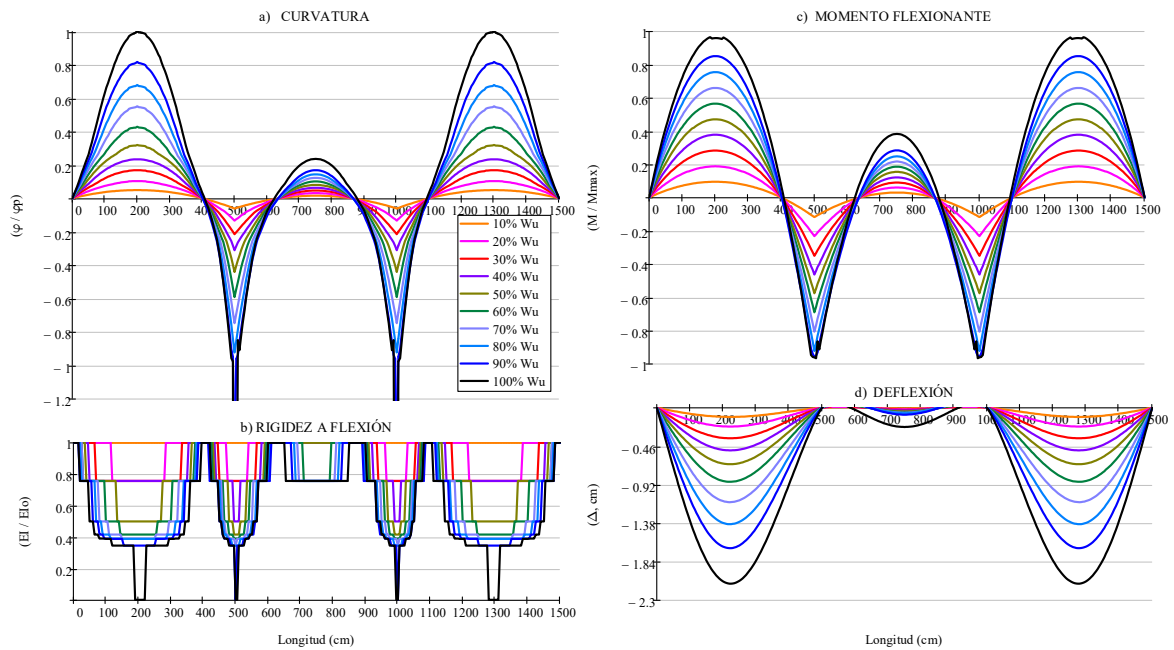


Figura 64. Viga tipo IV, con carga uniformemente distribuida.

Las ubicaciones de los puntos críticos donde ocurren las máximas magnitudes de; la curvatura, rigidez a flexión, momento flexionante y deflexión, ocurren en las zonas centrales (225 cm y 1275 cm) y en los apoyos centrales (500 cm y 1000 cm).

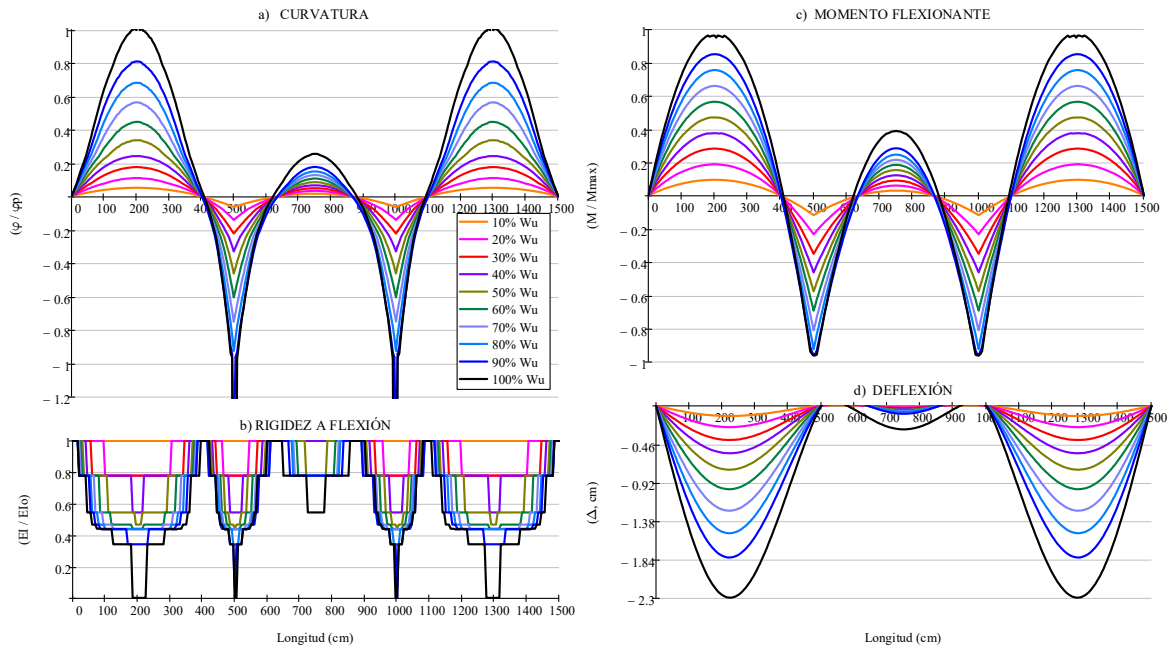


**Figura 65.** Gráficas de la viga V1, Tipo IV ( $W_u = 13.306 \text{ kg/cm}$ ).

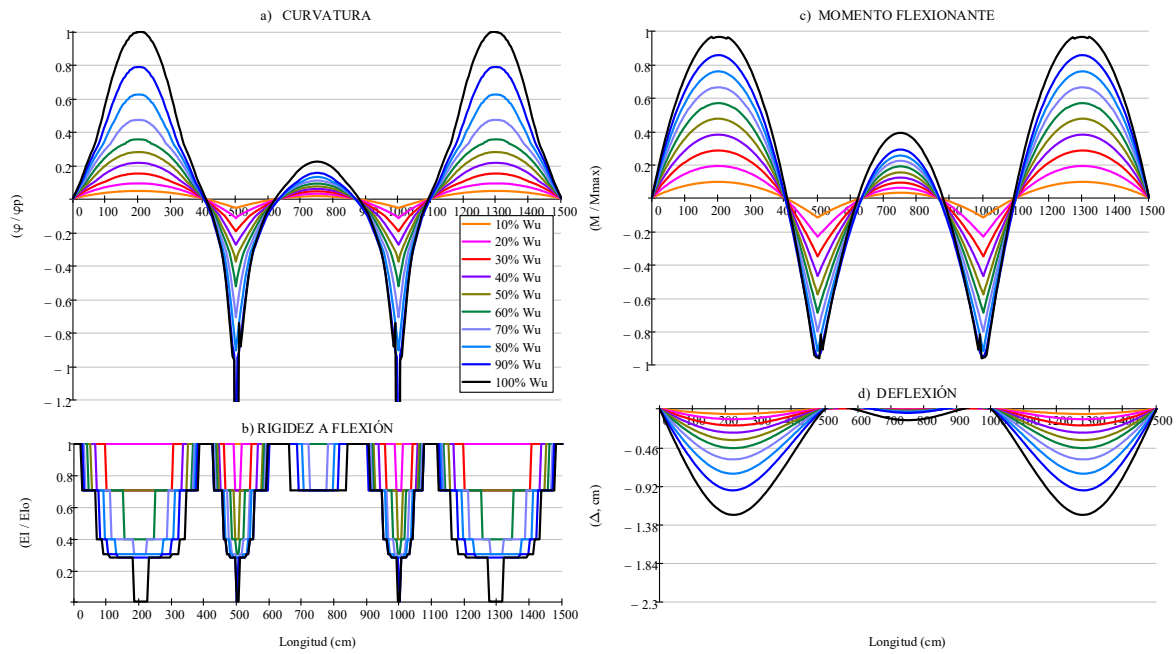


**Figura 66.** Gráficas de la viga V2, Tipo IV ( $W_u = 19.54 \text{ kg/cm}$ ).

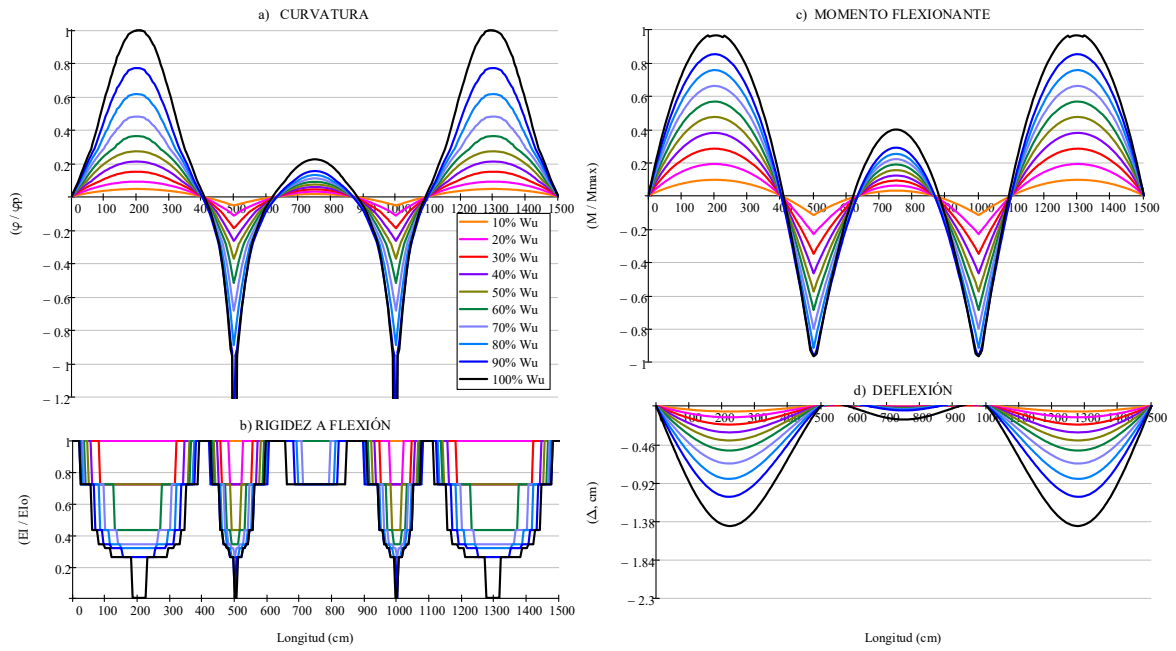




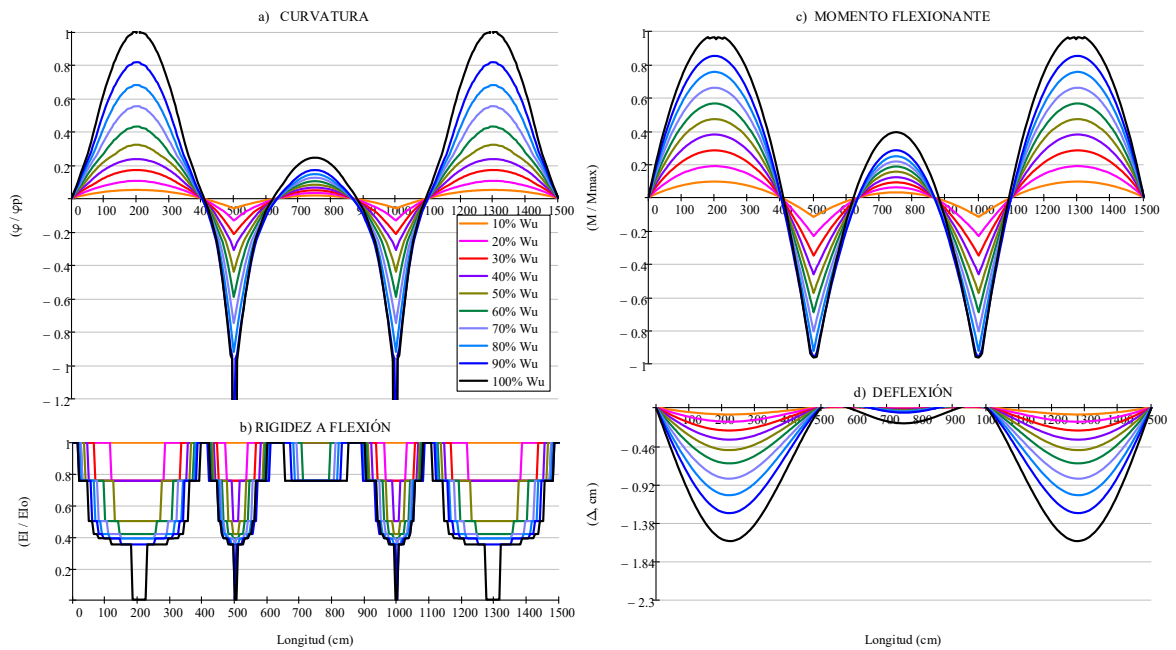
**Figura 67.** Gráficas de la viga V3, Tipo IV ( $W_u = 23.03 \text{ kg/cm}$ ).



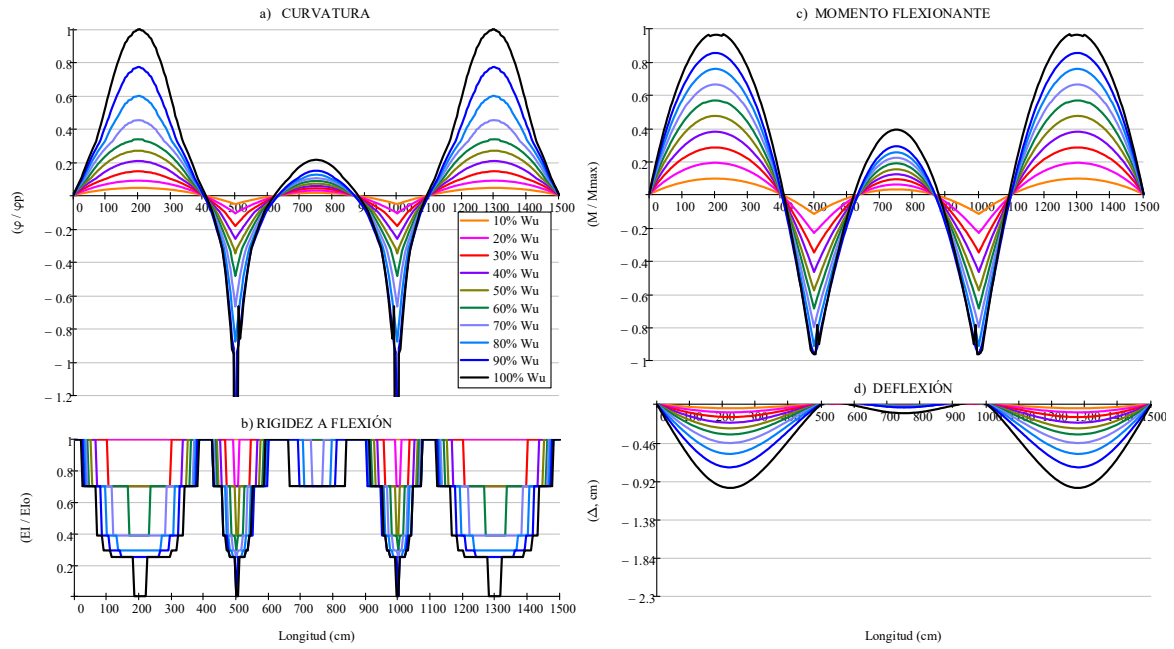
**Figura 68.** Gráficas de la viga V4, Tipo IV ( $W_u = 31.59 \text{ kg/cm}$ ).



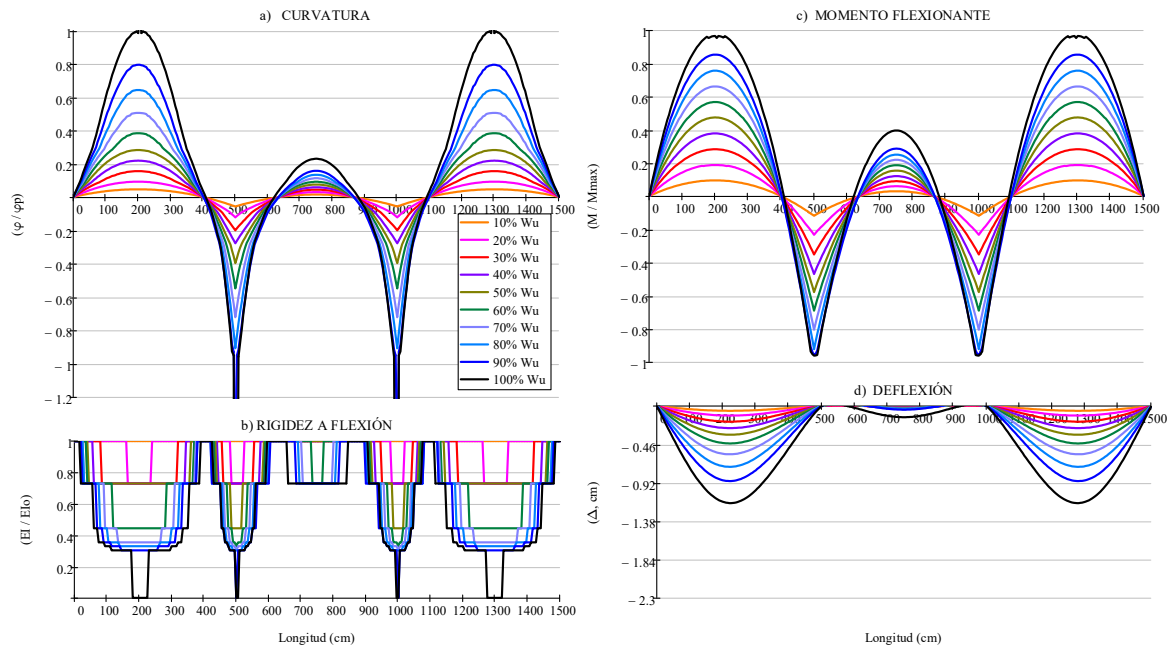
**Figura 69.** Gráficas de la viga V5, Tipo IV ( $W_u = 36.15 \text{ kg/cm}$ ).



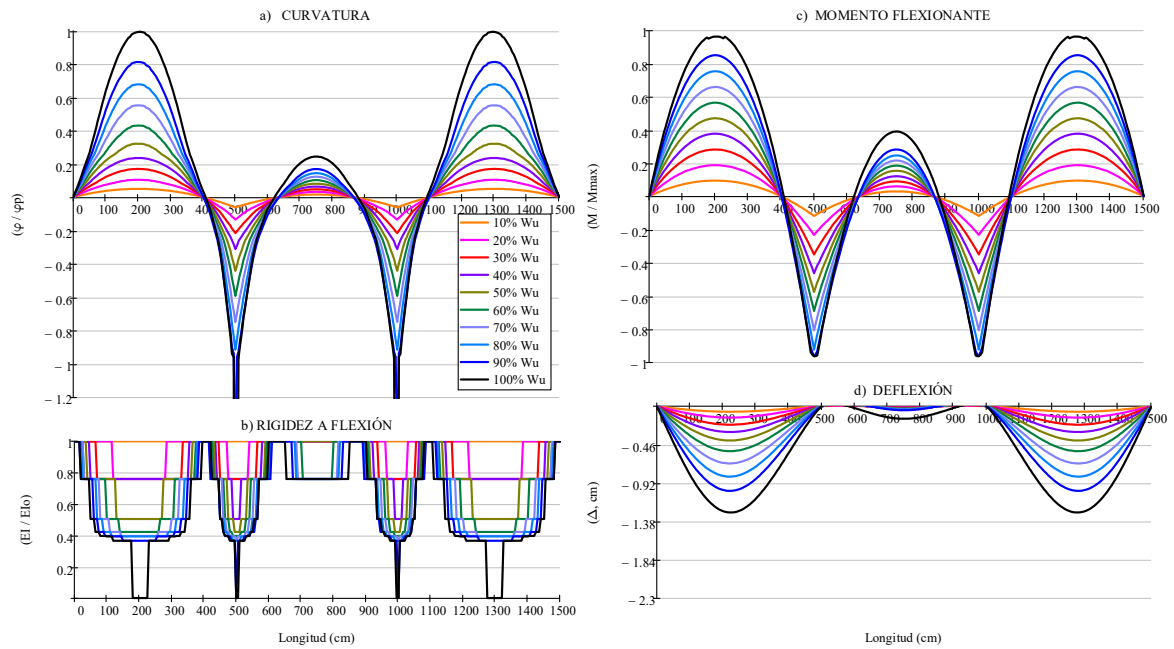
**Figura 70.** Gráficas de la viga V6, Tipo IV ( $W_u = 46.56 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 71.** Gráficas de la viga V7, Tipo IV ( $W_u = 59.44 \text{ kg/cm}$ ).



**Figura 72.** Gráficas de la viga V8, Tipo IV ( $W_u = 73.92 \text{ kg/cm}$ ).

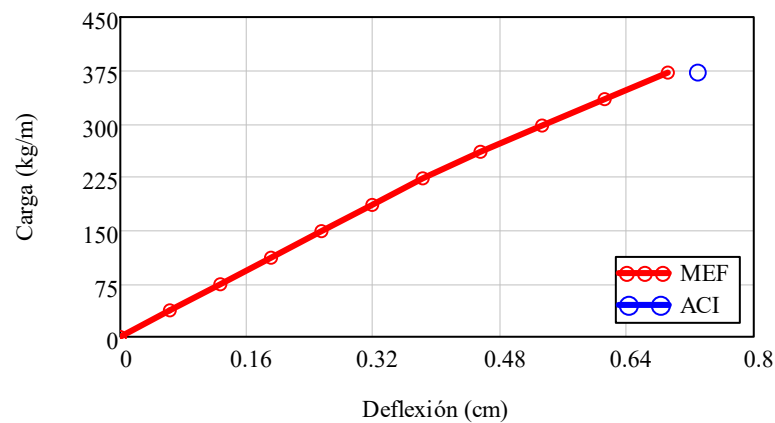


**Figura 73.** Gráficas de la viga V9, Tipo IV ( $W_u = 91.92 \text{ kg/cm}$ ).

## 4.5. COMPARATIVAS ENTRE EL MÉTODO DEL ACI vs MEF CON RNLM.

### 4.5.1. COMPARATIVAS DE LA VIGA TIPO I.

La siguiente grafica representa la comparativa realizada con los resultados obtenidos con el método del ACI (Dan E. Branson) y la metodología propuesta en esta investigación.



**Figura 74** Comparativa del Método del ACI vs Metodología con **RNLM**, para viga tipo I.

En el análisis realizado mediante el MEF con la Respuesta No Lineal del Material (**RNLM**), se grafica con incrementos de carga del 10% hasta alcanzar el 100% de la carga de servicio. Para el caso del método del ACI, el punto azul representa la deflexión máxima al centro del claro causado por el 100% de la carga de servicio. Como se puede observar el resultado de los dos métodos son muy similares con un error del 5%.

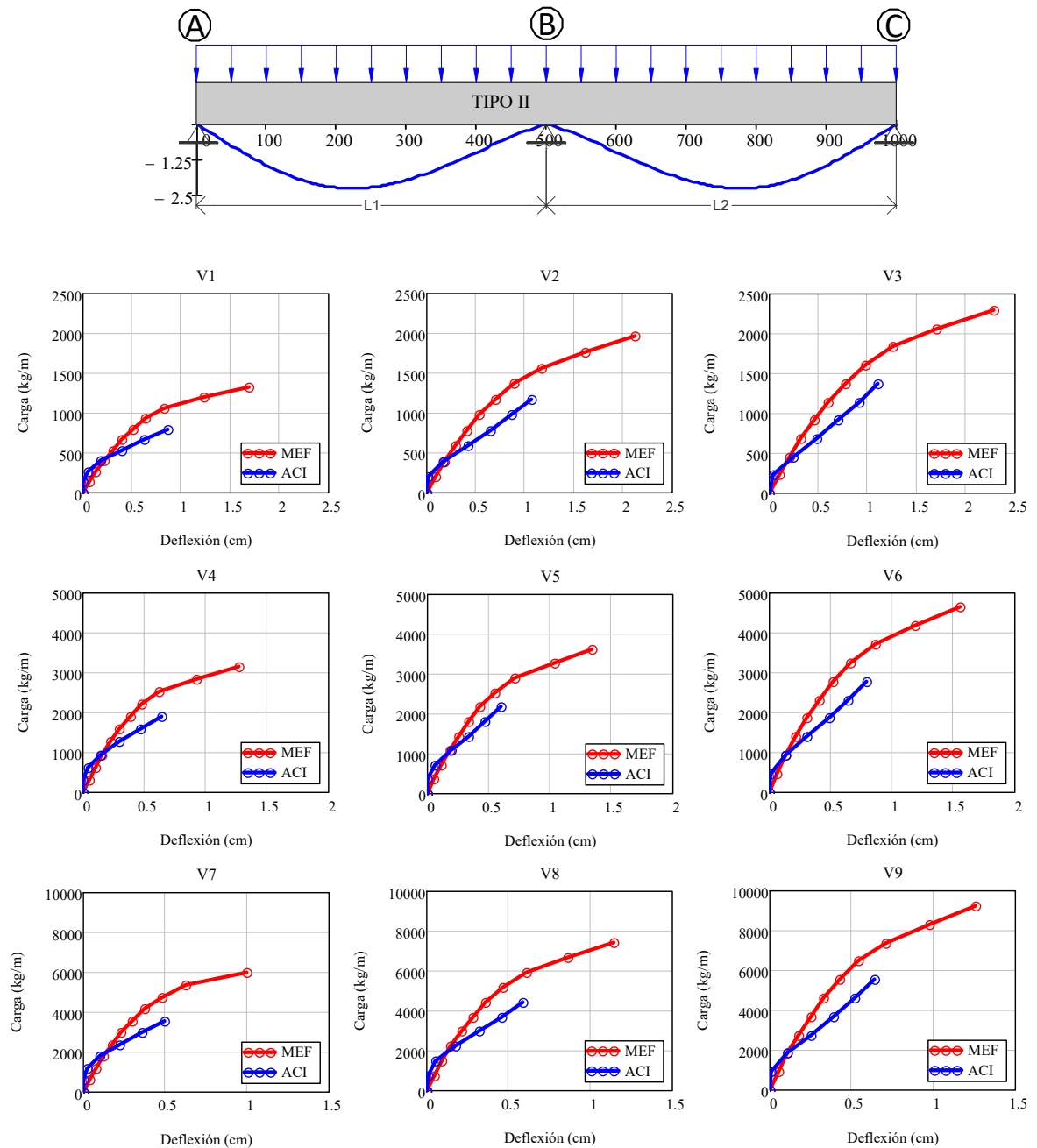
#### 4.5.2. CARGA-DESPLAZAMIENTO DE LAS VIGAS CONTINUAS.

Los resultados obtenidos de los análisis desarrollados para vigas continuas, ilustran el comportamiento aproximado que se puede presentar durante los eventos de gran demanda de las vigas de CR.

Los resultados entre el método del **ACI** y el **MEF** con **RNLM**, se resumen en gráficas comparativos (carga-deflexión) con la finalidad de observar las diferencias entre ambos métodos. La información de los prototipos de vigas analizadas, se encuentra registradas en la sección **3.2.2**.

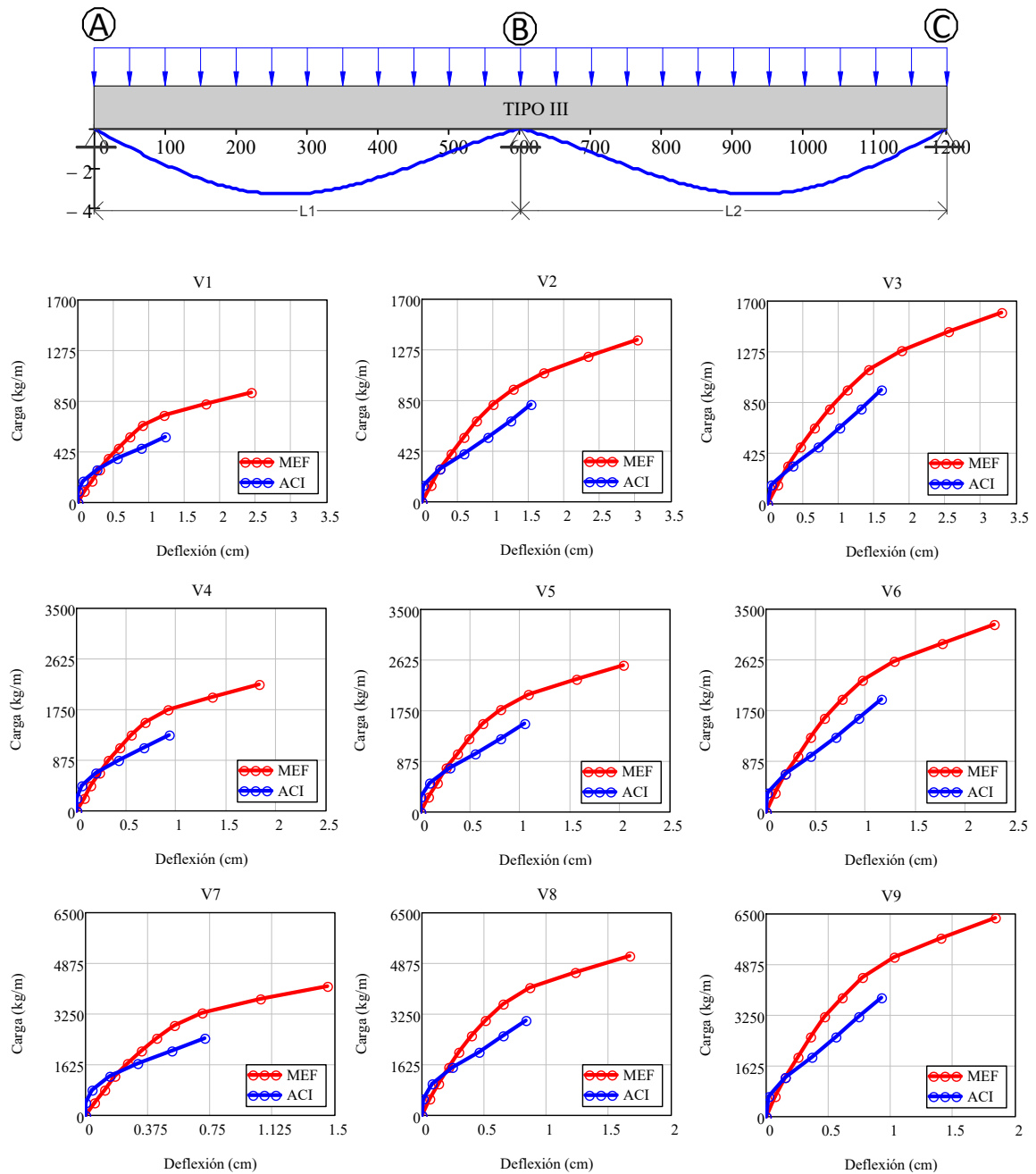
Con respecto al método del ACI para el cálculo de las deflexiones, la metodología consiste en registrar solo la deflexión máxima de acuerdo a la carga de servicio aplicado. Sin embargo, en las siguientes gráficas (**Figura 75**, **Figura 76** y **Figura 77**) se ilustran 6 etapas de cargas hasta alcanzar la carga de servicio, con la finalidad de realizar un seguimiento del comportamiento ante los incrementos de cargas.

Por otro lado, los resultados con el **MEF** con **RNLM**, se obtuvieron mediante la aplicación de incrementos de cargas hasta alcanzar el 100% de la carga  $W_u$ .



**Figura 75.** Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con *RNLM*, vigas tipo II.

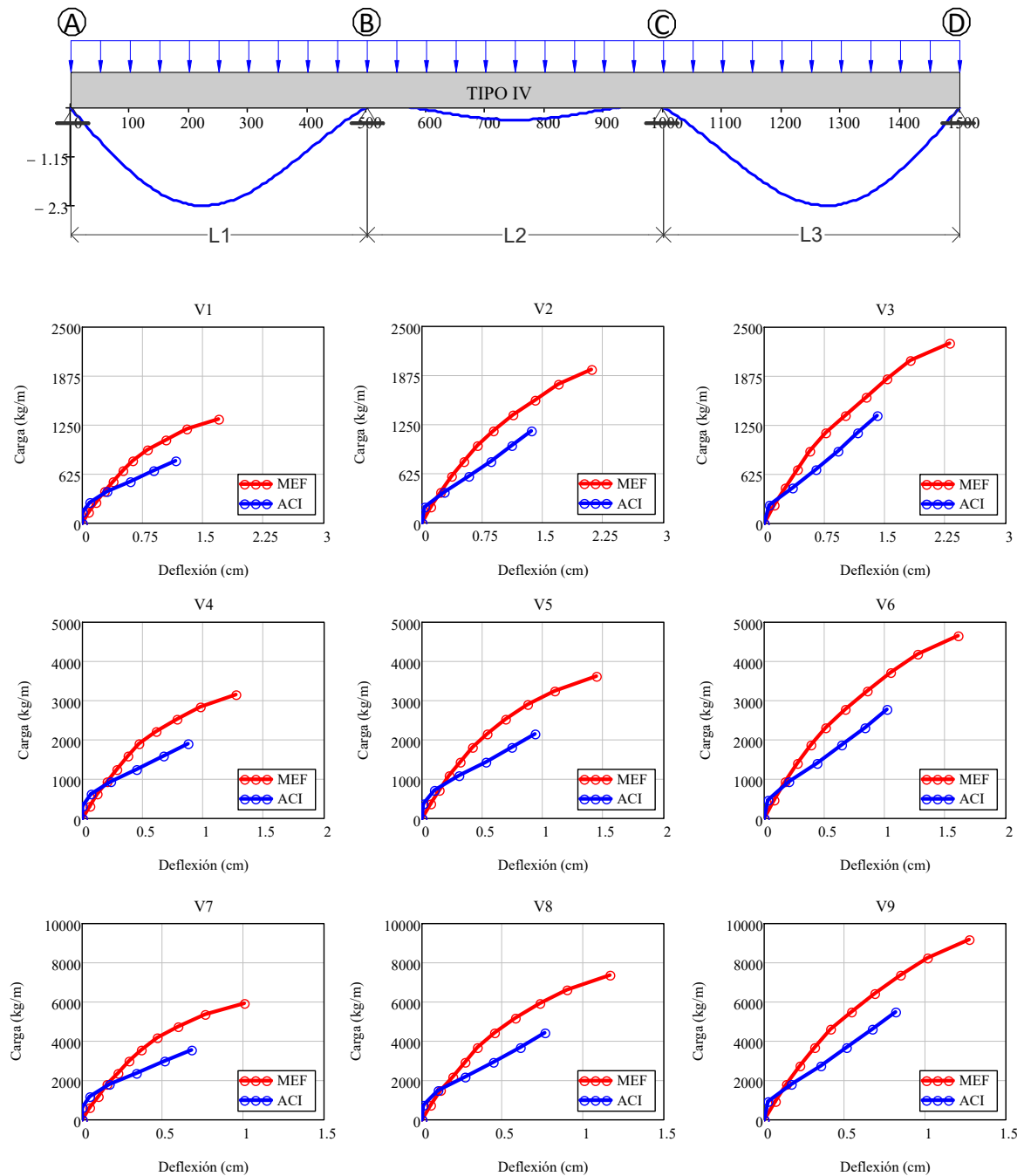
Los resultados anteriores se encuentran ubicados a los 225 cm y 775 cm de la viga.



**Figura 76.** Comparativa entre métodos del ACI y el MEFcon *RNLM*, vigas tipo III.

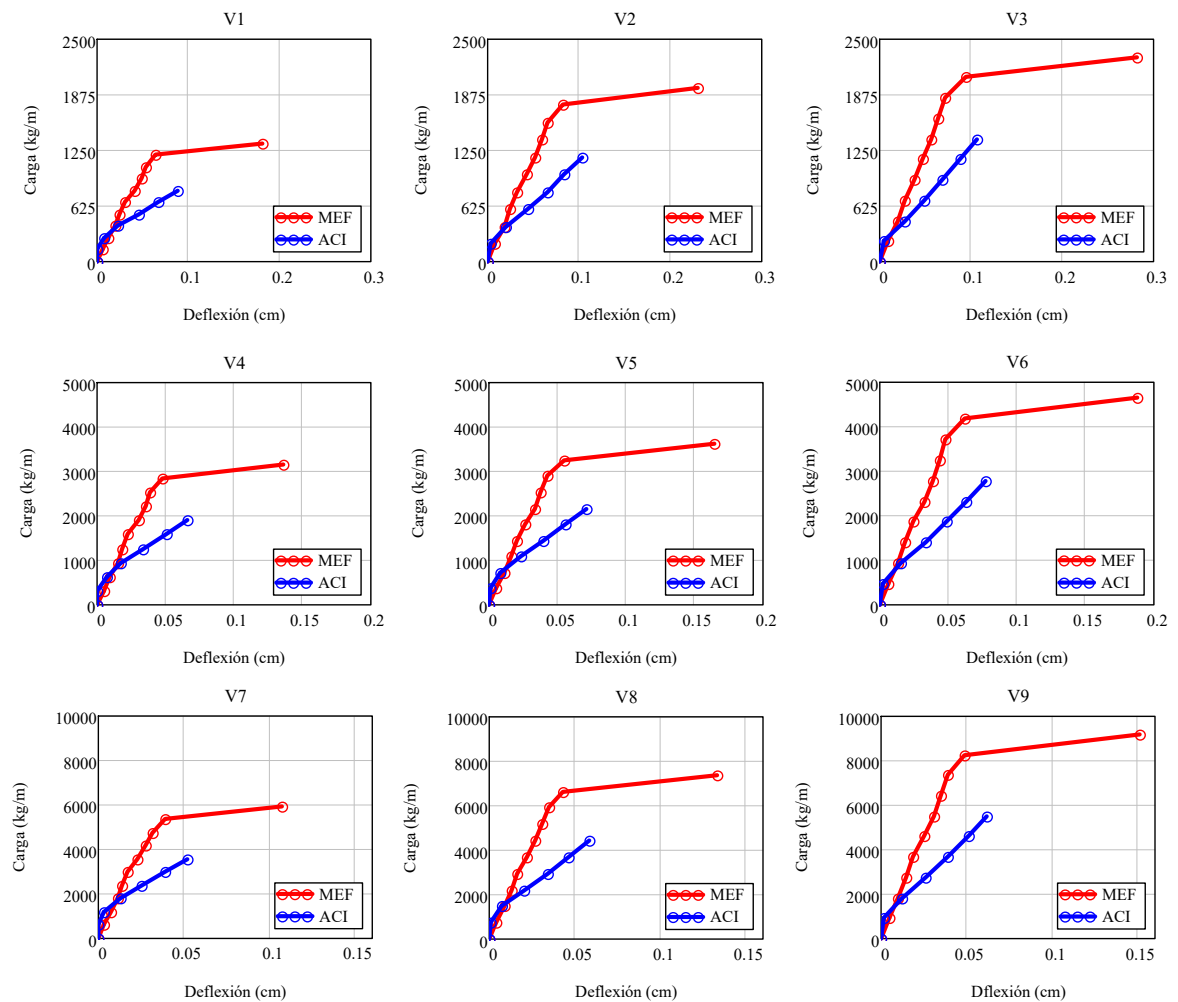
Los resultados anteriores se encuentran ubicados a los 270 cm y 930 cm de la viga.





**Figura 77.** Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con *RNLM*, vigas tipo IV para claros de bode.

Los resultados anteriores se encuentran ubicados a los 225 cm y 775 cm de la viga.



**Figura 78.** Comparativa entre métodos del ACI y el MEF con *RNLM*, vigas tipo IV para claro central.

Los resultados anteriores se encuentran a la mitad del claro central (750 cm). Cabe destacar que el comportamiento mostrado en la gráfica anterior, no representa la plastificación del material, más bien representa poca deformación debido a las cargas aplicadas.

## **CAPÍTULO 5**

### **ANÁLISIS DE RESULTADOS**

---

En este capítulo se desarrolla la interpretación de los resultados obtenidos en el análisis de los prototipos de vigas, esto es, para vigas continuas y viga de un solo claro.

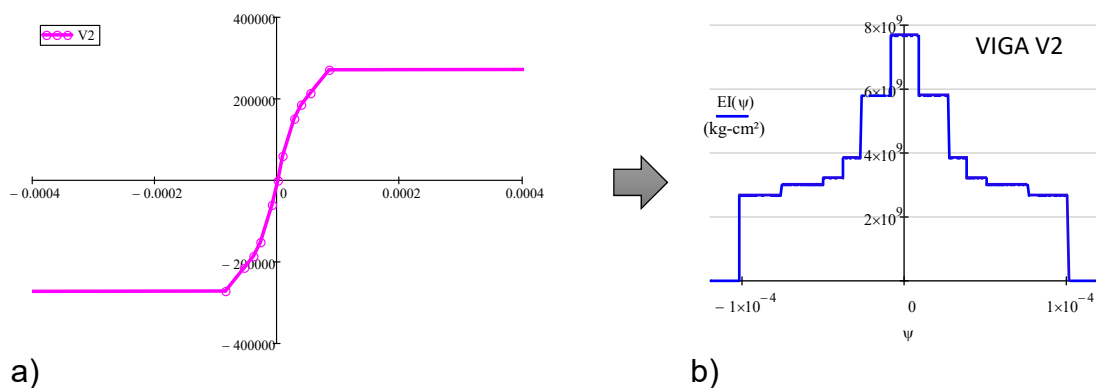
Es de gran importancia abordar los temas que se relacionan con el comportamiento de las vigas, entender lo que ocurre en el interior de las vigas y de qué manera esto puede reflejar en su comportamiento externo al ser sometido a cargas más allá de las cargas de servicio.

Primeramente se realiza un análisis de resultados para los diagramas de rigidez a flexión, diagramas de curvaturas y diagramas de momento flexionante. Posteriormente, los diagramas de deflexiones es el punto culminante de esta investigación, ya que la metodología propuesta radica en generar resultados confiables que sean fácil y rápida de obtenerlas en comparación con métodos más sofisticados. Para realizar una comparativa, se utiliza la metodología del cálculo de deflexiones propuesta por Branson (Branson D. E., 1972) adoptada por el comité del ACI-435 (ACI435R-95, 1995).

## 5.1. RIGIDEZ A FLEXIÓN DE LAS VIGAS (RF).

A partir de las gráficas de  $M-\phi$  de las secciones transversales de las vigas, se determinó la magnitud de las pendientes de cada punto analizado, dichos valores se representan con la función  $EI(\psi)$ , correspondiente al valor respectivo de la rigidez a flexión.

En la sección 4.2, se presentan las gráficas de la rigidez a flexión de las vigas estudiadas. Los valores correspondientes de la rigidez a flexión cumplen la función de incluir la no linealidad del material dentro del algoritmo desarrollado.



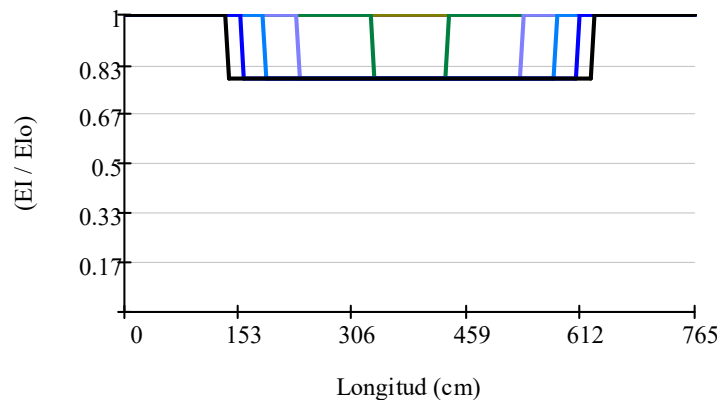
**Figura 79.** (a) relación  $M-\phi$  de la sección de viga V2. (b) muestra las pendientes obtenidas del diagrama  $M-\phi$ .

Las pendientes del diagrama de  $M-\phi$ , se observan en la **Figura 79.b**; resulta evidente la presencia de un valor de rigidez superior en la parte con curvatura mínima.

### 5.1.1. RIGIDEZ A FLEXIÓN DE LA VIGA DE UN CLARO.

La viga VS-1, es una viga de un claro, con carga uniformemente distribuida. La magnitud de la carga aplicada en la viga es de **3.72 kg/cm** (250 lb/ft), cuyo valor coincide con los parámetros de estudio planteados por Branson para la obtención de momento de servicio (Branson D. , 1968).

Al incrementar gradualmente la magnitud de la carga, la rigidez a flexión se ve afectada disminuyendo su magnitud, principalmente en la zona central de la viga y cuyo valor coincide con la ubicación del momento máximo por flexión.



**Figura 43-b.** Gráficas de la Rigidez a Flexión, para diez pasos de cargas.

$$(W_u = 3.72 \text{ kg/cm})$$

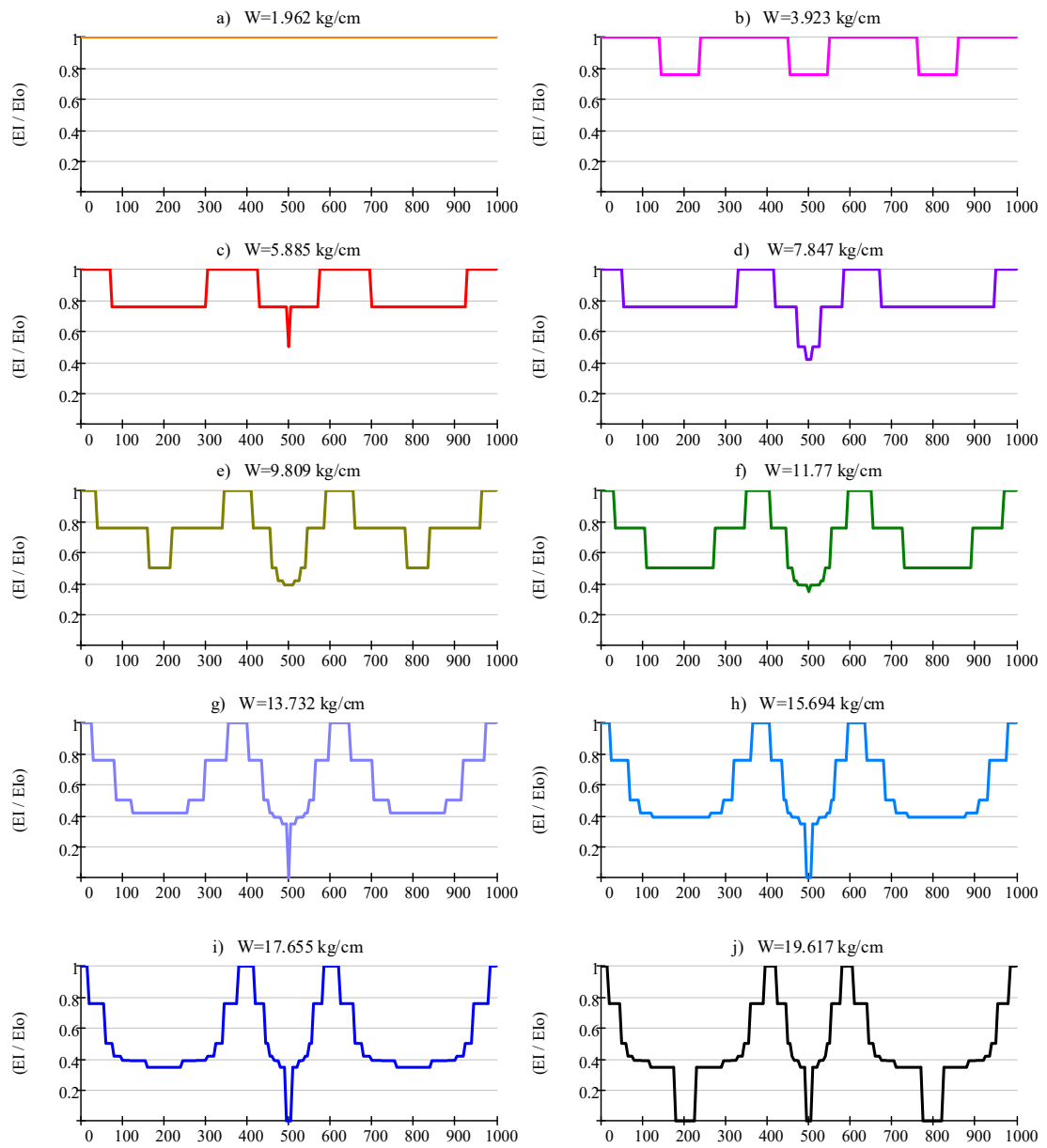
Por otro lado, es posible observar un fenómeno de plastificación distribuida; representando de manera más realista la sucesión de eventos de no linealidad y, finalmente, de su mecanismo de colapso sin requerir las hipótesis de plasticidad concentrada de los análisis no lineales convencionales.

### 5.1.2. RIGIDEZ A FLEXIÓN PARA VIGAS CONTINUAS

El análisis de la viga V2, se desarrolló mediante la aplicación de incrementos graduales de cargas sobre la viga continua.

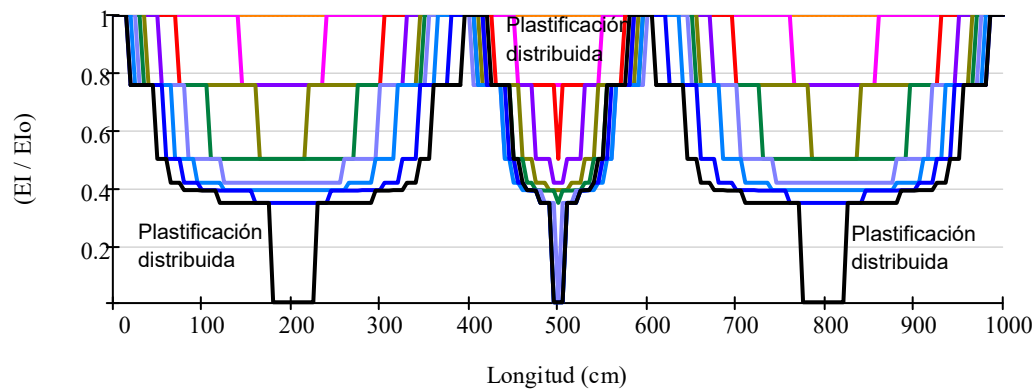
A continuación, se describe las observaciones más relevantes:

- a) En la primera etapa de carga de la viga (**Figura 80.a**), se observa que la RF de la viga se mantiene constante, debido a que la magnitud de la carga aplicada es muy pequeña.
- b) En los siguientes pasos de cargas, se pueden observar la disminución de la RF de la viga, principalmente en las zonas centrales y en el apoyo central. Como se mencionó anteriormente, la plastificación del material ocurre de manera distribuida.
- c) En la **Figura 80.g**, se ilustra la etapa de carga que genera la pérdida de rigidez en el apoyo central. Nuevamente se distingue que el proceso de reducción de rigidez es de manera distribuida.
- d) En la **Figura 80.j**, debido a que ha ocurrido la plastificación total en las secciones de la viga, en los puntos ubicados a 2.1 m y 7.9 m de la longitud de la viga. La viga ya no es capaz de soportar más carga, y se determina un estado de falla por prevención de colapso.

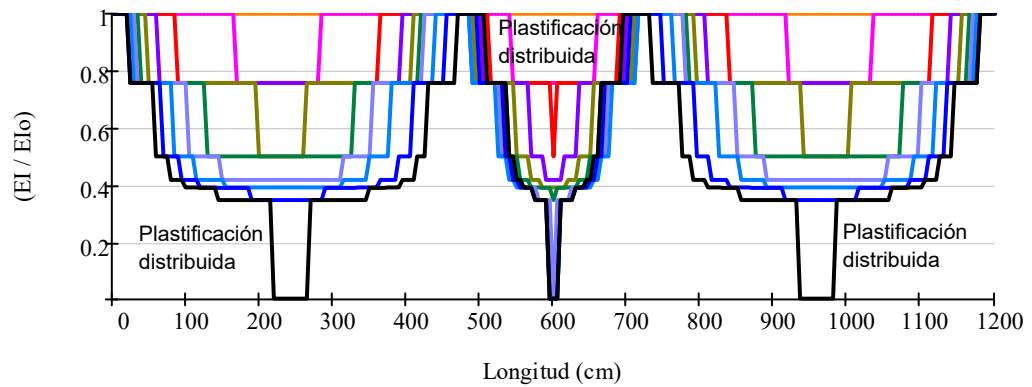


**Figura 80.** Grafica de la rigidez a flexión de la viga V-2, tipo II con diversos pasos de cargas.

En la **Figura 81**, **Figura 82**, se observan la plastificación distribuida en zonas donde ocurren los momentos máximos. La pérdida de rigidez ocurre primeramente en los apoyos centrales y posteriormente al incrementar más la carga, se genera la pérdida de rigidez en las zonas centrales de los claros.



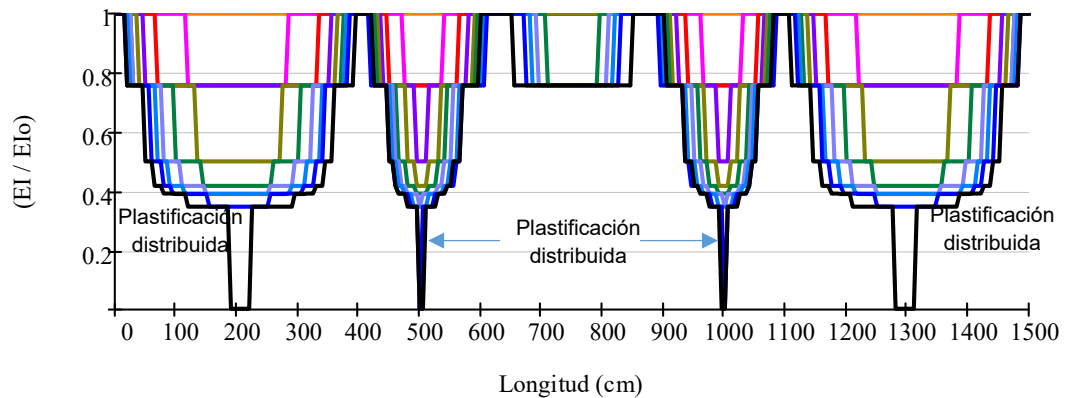
**Figura 81.** Rigidez a flexión de la viga V2-Tipo II.



**Figura 82.** Rigidez a flexión de la viga V2, Tipo III.



Para la viga de tres claros, se obtuvo un comportamiento similar en los claros de borde en comparación con la viga de dos claros. Sin embargo, en el claro central, la disminución de la rigidez es relativamente pequeña en comparación con los claros de borde, las magnitudes de la plastificación del material es poco menor del 80%, y por consiguiente, no logra a generarse un mecanismo plástico de colapso en dicha zona (ver Figura 83).



**Figura 83.** Rigidez a flexión de la viga V2, Tipo IV.

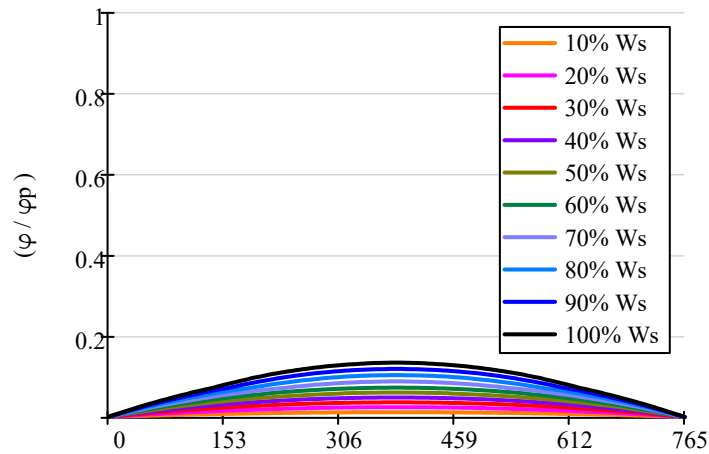
## 5.2. CURVATURAS.

En esta sección se analizan los diversos resultados referentes a los diagramas de curvatura para las vigas simplemente apoyadas y las vigas continuas. Como se ha observado con anterioridad, la curvatura ( $\phi$ ) es una medida con la cual es posible determinar la magnitud de deformación presente en las vigas en estudio.

### 5.2.1. CURVATURAS PARA VIGA DE UN CLARO.

En la **Figura 84** se pueden observar los diversos gráficos de curvatura contra longitud de la viga, con diez registros de incrementos de cargas aplicados en la viga en estudio.

Todos los diagramas observados se encuentran por debajo del 20% de la curvatura correspondiente a la zona de comportamiento plástico. Esto se debe principalmente a la magnitud baja de las cargas aplicadas, dichas cargas varían dentro de un rango de 37.2 kg/m hasta 372 kg/m.

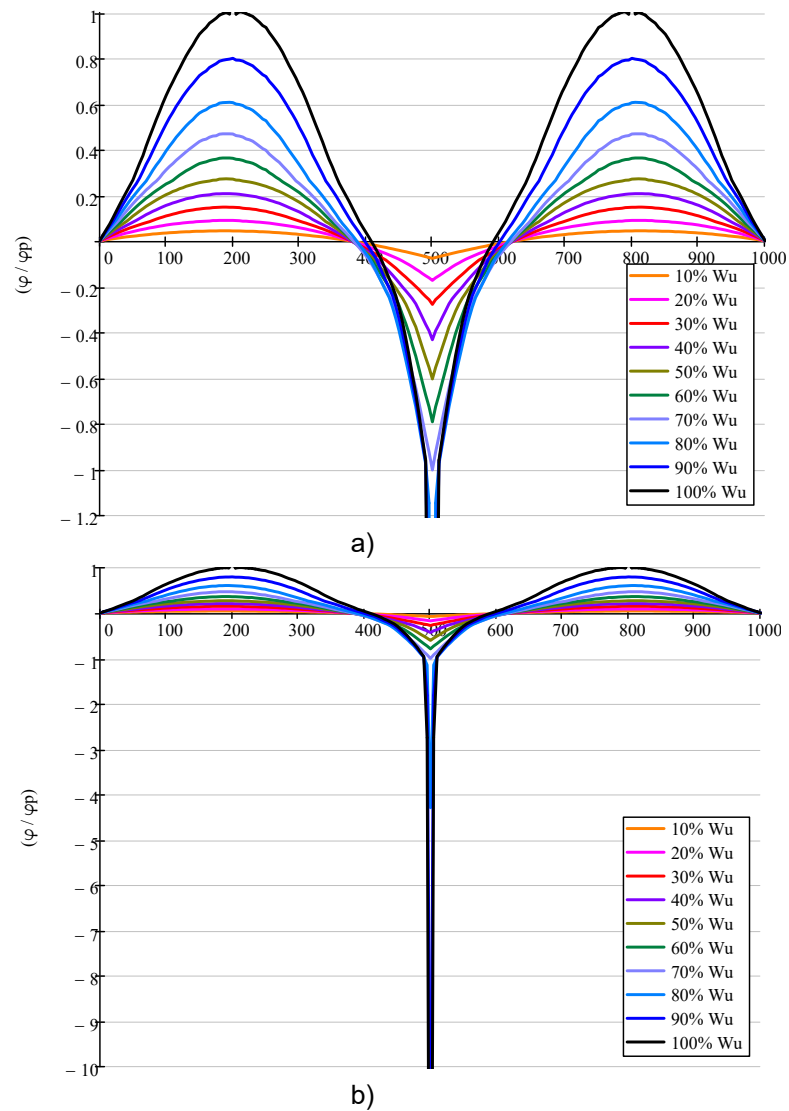


**Figura 84.** Diagramas de curvaturas para la viga VS-1.

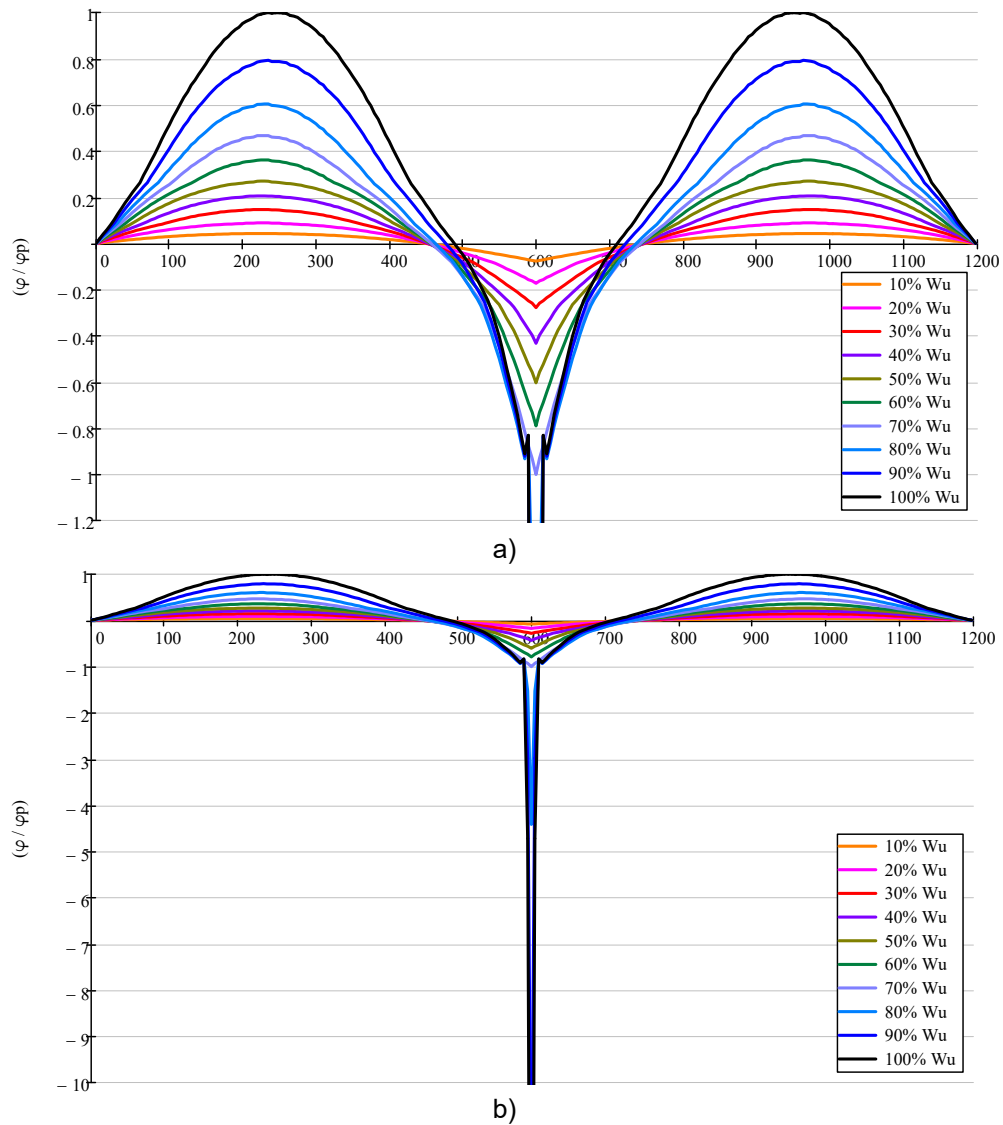
### 5.2.2. CURVATURA PARA LAS VIGAS CONTINUAS.

Las gráficas de curvaturas son obtenidas a partir de la aplicación de incrementos graduales de cargas bajo las condiciones preestablecidas. Como era de esperarse, las curvaturas muestran una tendencia de incremento en magnitud conforme se desarrolla la aplicación de los incrementos de cargas.

Las curvaturas máximas ocurren primeramente en los apoyos intermedios con la carga de  $0.7W_u$ , al ir incrementando la carga hasta alcanzar  $W_u$  se logra alcanzar la curvatura máxima en las zonas centrales de los claros (ver **Figura 85** y **Figura 86**), en ese momento se puede afirmar que ha ocurrido un mecanismo de colapso donde intervienen la plastificación distribuida de la sección de la viga.

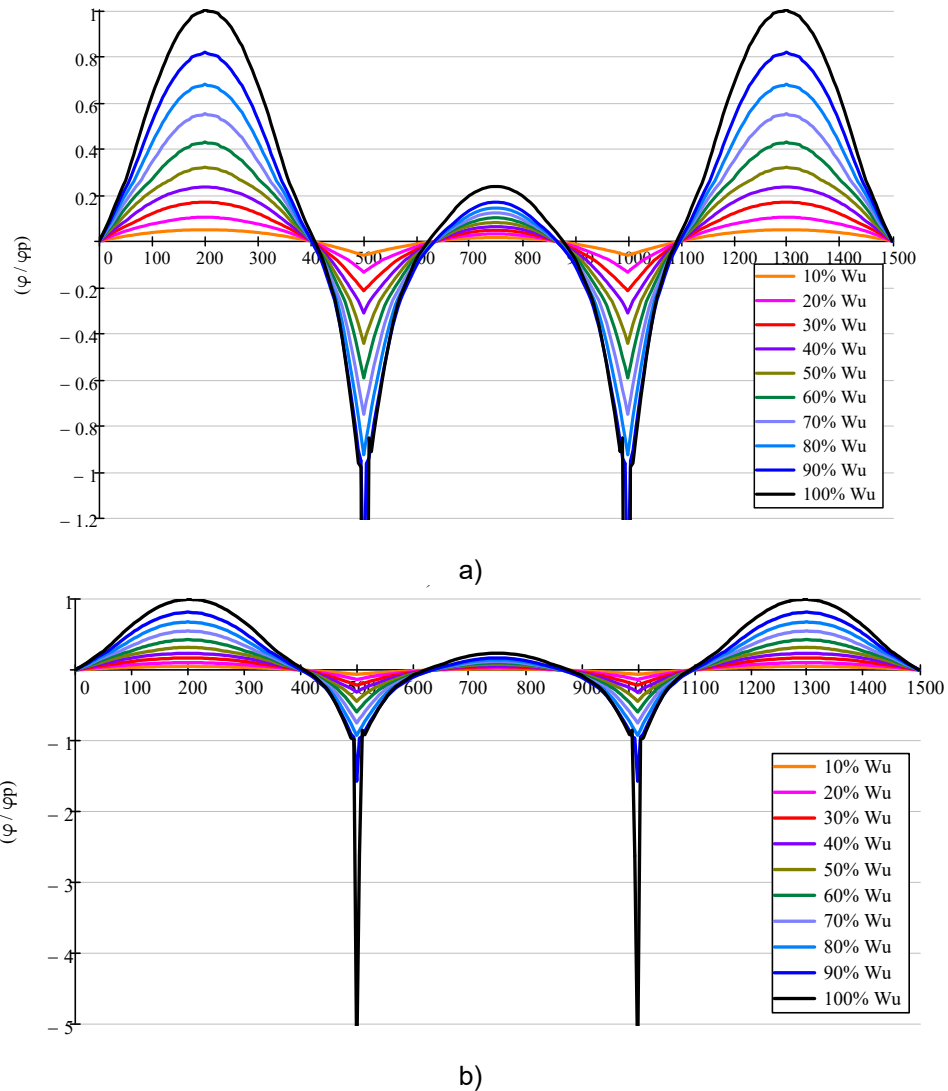


**Figura 85.** a) Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo II, b) diagrama de curvaturas completo.



**Figura 86.** a) Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo III, b) diagrama de curvaturas completo.

Para el caso de la viga de tres claros (ver **Figura 87**), se distingue en el claro central, ya que es la única zona donde la pérdida de rigidez es mínima, alcanzando magnitudes cercanos a  $0.3\varphi_{max}$ . Debido a que ha ocurrido la ruptura y colapso de la viga, no es posible seguir con los incrementos de las cargas.

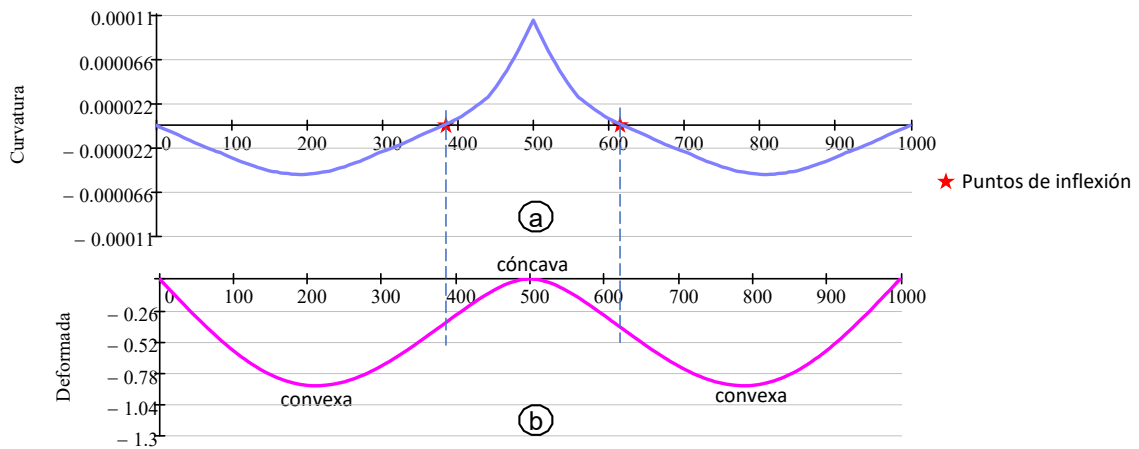


**Figura 87.** a) Diagramas de curvaturas de la viga V2-tipo IV, b) diagrama de curvaturas completo.

En la **Figura 88** se ilustran dos gráficas, la primera representa la curvatura a lo largo de la viga, las líneas punteadas ubican perfectamente la zona donde ocurre el cambio de orientación de las fibras, que van de convexo a cóncavo y viceversa.

En la zona convexa, la fibra a tensión se encuentra en la parte inferior, mientras que en la zona cóncava la fibra a tensión se ubica en la parte superior

de la sección transversal. Este dato es relevante, ya que podremos conocer con buena exactitud, la longitud necesaria para que las varillas tomen la tensión debido a las cargas aplicadas.



**Figura 88.** Diagramas de curvaturas en diferentes etapas de cargas.

NOTA: la **Figura 88-a**, tiene la orientación inversa de lo que anteriormente se venía presentando, esto se hizo para facilitar la interpretación entre las dos gráficas.

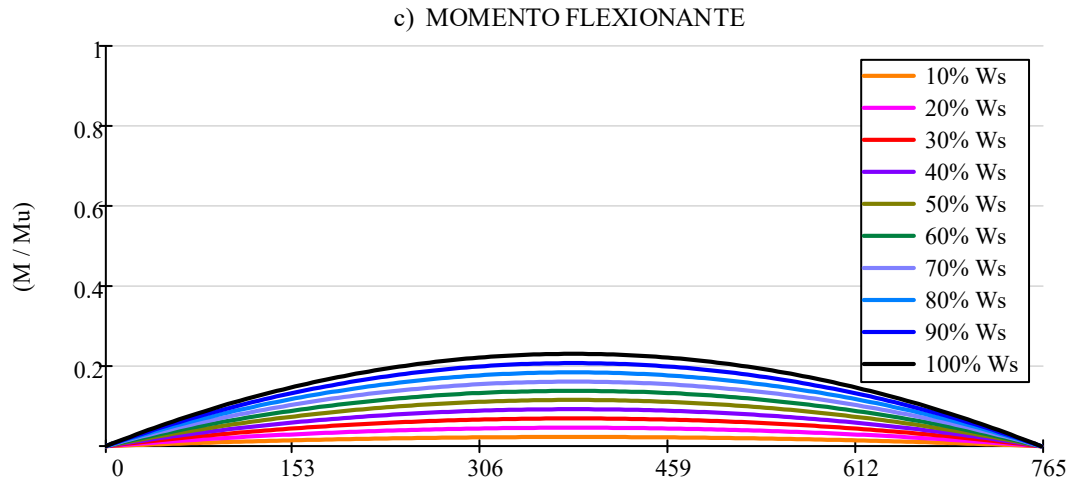
### 5.3. MOMENTO FLEXIONANTE

Uno de los propósitos de la ingeniería estructural, es analizar y diseñar elementos estructurales que resistan cargas accidentales de gran magnitud. Las estructuras de concreto reforzado se diseñan a partir de los diagramas de momentos flexionantes y otras resultantes, por lo anterior, se espera que al abordar el tema de los momentos a flexión en vigas sea posible establecer guías básicas de condiciones de diseño similares para profesionistas facultados en el diseño estructural.

A continuación, se discuten los resultados de los momentos flexionantes obtenidos en el análisis de las vigas de uno y más claros.

#### 5.3.1. MOMENTOS FLEXIONANTES PARA VIGA DE UN CLARO.

Como se ha mencionado anteriormente, la viga de un claro propuesto por Branson (Branson D. , 1968), se analizó con cargas en la etapa de servicio. Como resultado de este análisis se ilustra en la **Figura 89**, los diagramas de momento muestran una condición de trabajo mecánico por debajo de la capacidad resistente de la viga.



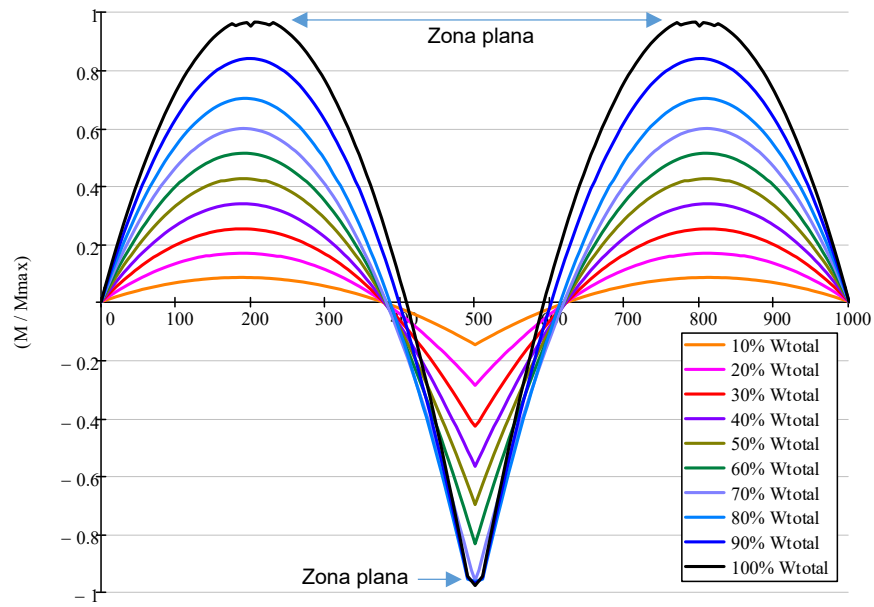
**Figura 89.** Diagramas de MF para la viga VS-1, Tipo I.

### 5.3.2. MOMENTOS FLEXIONANTES PARA VIGAS CONTINUAS.

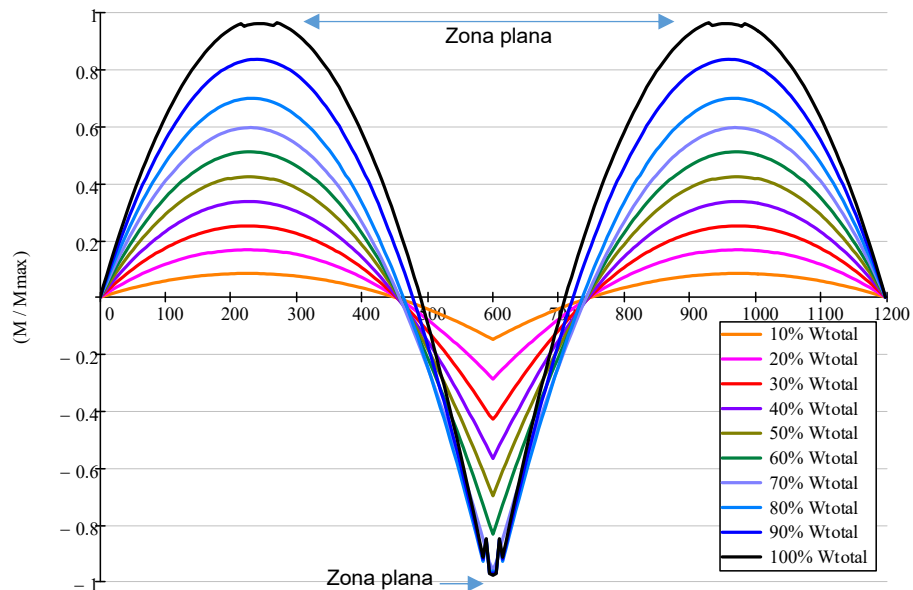
Se utilizó la misma metodología sometiendo a la viga V2 a 100 pasos de cargas dentro del algoritmo de cálculo, se capturaron solo 10 pasos de cargas para ilustrar los diagramas de momentos (ver **Figura 90** y **Figura 91**). A continuación se presenta los resultados más relevantes de la viga de dos claros.

- a) En el apoyo intermedio es donde se presenta primeramente el  $M_{max}$ , que corresponde al  $0.7W_u$ .
5. Se continuó con los incrementos de cargas hasta alcanzar  $W_u$ , en esta etapa de carga se logra alcanzar el  $M_{max}$  en las zonas centrales de la viga.
6. En el apoyo central, se genera un corte del diagrama de momentos ya que la sección no tiene la capacidad de seguir resistiendo más fuerzas de tensión en la fibra superior.





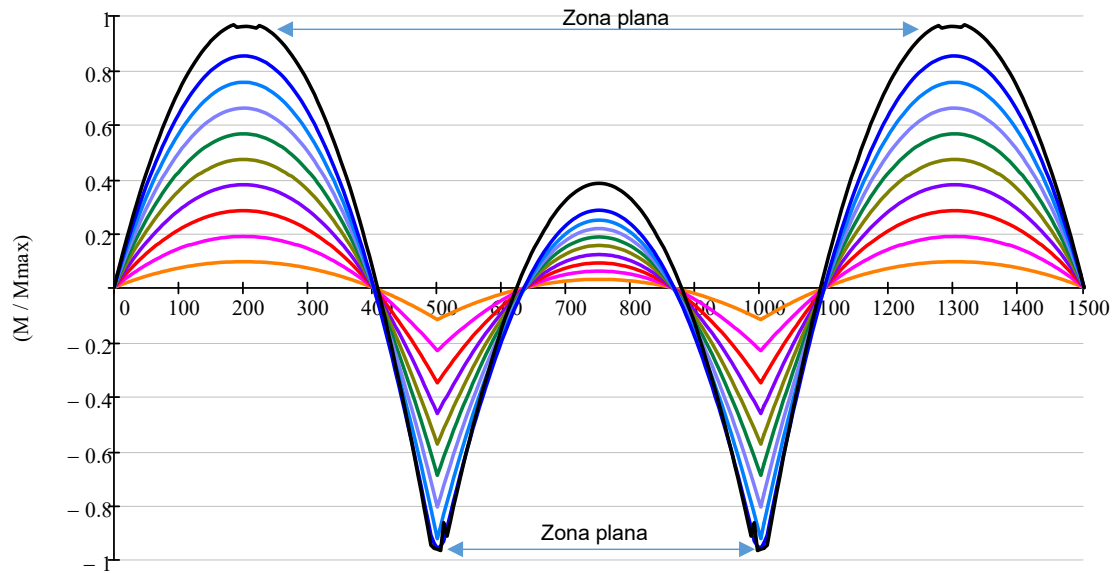
**Figura 90.** Diagramas de MF de la viga V2, Tipo II.



**Figura 91.** Diagramas de MF de la viga V2, Tipo III.

Para la viga de tres claros (ver **Figura 92**), son muy similares a las vigas del tipo II y tipo III. Conforme se avanza con los incrementos de cargas, se logra alcanzar los  $M_{max}$  primeramente en los apoyos centrales y posteriormente en las zonas centrales de los claros de borde. Sin embargo, en el claro central, el

desarrollo de los momentos flexionantes es muy pequeña en comparación de los claros de borde.



**Figura 92.** Diagramas de MF de la viga V2, Tipo IV.

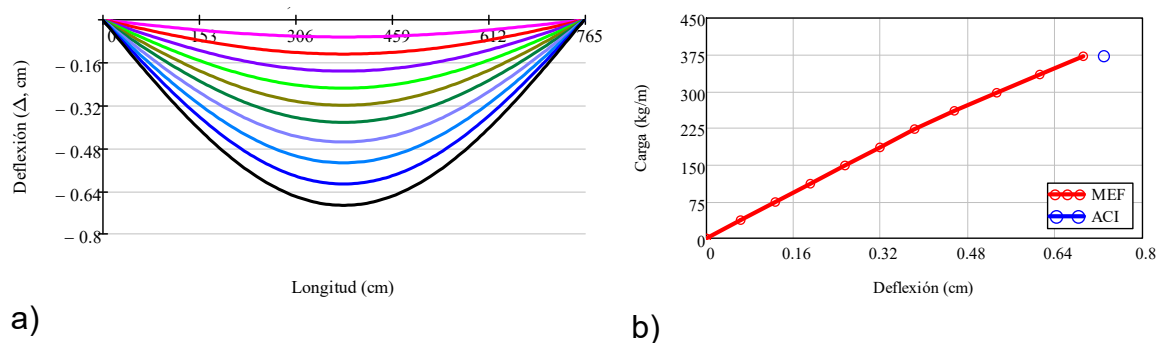
## 5.4. DEFLEXIONES.

### 5.4.1. DEFLEXIONES PARA VIGA DE UN CLARO.

Se presenta a continuación el resultado obtenido de acuerdo a lo prescrito en el reporte del comité 435-96 del ACI y los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta en esta disertación.

En la sección 4.3 se muestran los resultados obtenidos con carga viva de 250 lb/ft, dicha carga se encuentra distribuida a lo largo de los 25ft.

En la **Figura 93(a)** se muestran la gráfica de deflexiones, correspondientes a 10 de los 100 pasos de carga utilizados en el análisis. El incremento de carga aplicado corresponde a  $\Delta_w = 25 \text{ lb/ft} (37.2 \text{ kg/m})$ , el cual se acumula hasta alcanzar la carga total. En la **Figura 93(b)**, se muestra la comparativa entre los dos métodos, solo para la carga de servicio, los resultados son muy similares, teniendo una diferencia alrededor del 5%  $\left( \frac{\Delta_{ACI}}{\Delta_{MEF}} = \frac{7.31 \text{ mm}}{6.93 \text{ mm}} = 1.054 \right)$ .



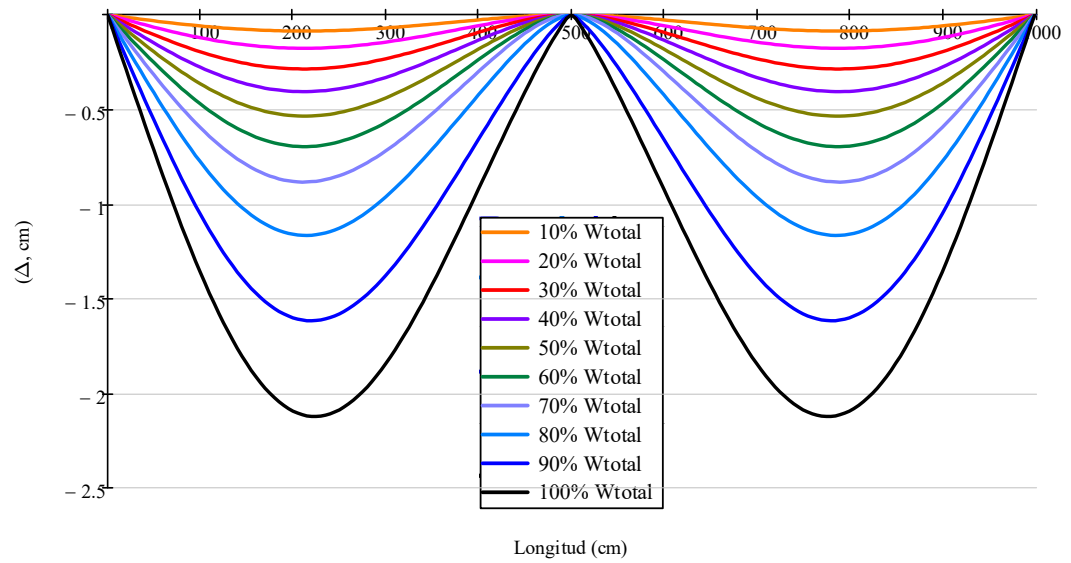
**Figura 93. a)** Diagramas de Deflexiones para VS-1, **b)** comparativa entre el metodo del ACI y MEF con RNLM.

#### 5.4.2. DEFLEXIONES PARA VIGAS CONTINUAS.

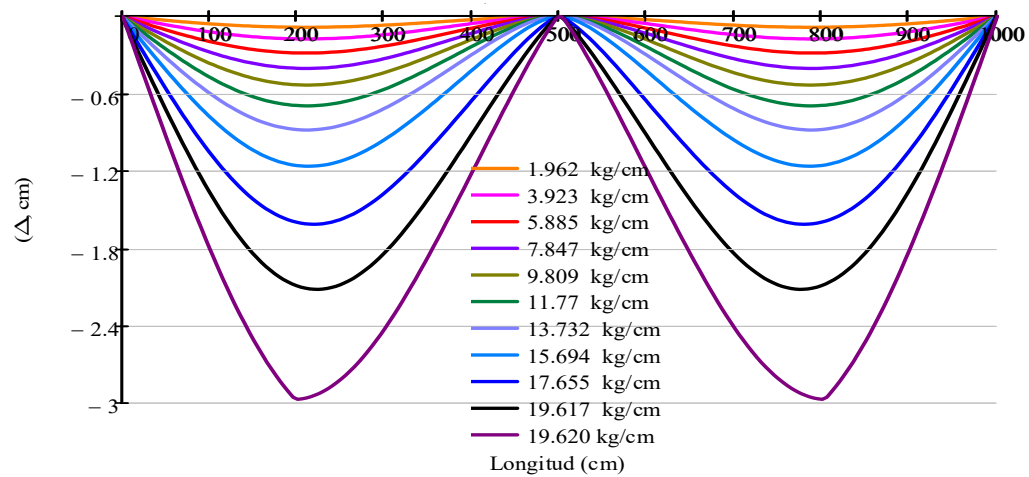
El algoritmo principal para el cálculo de las deflexiones inmediatas, aplicadas a vigas continuas, desarrolla una serie de interpolaciones numéricas para obtener la matriz de deformaciones mediante 100 incrementos de cargas. Se analizaron nueve vigas con diferentes propiedades geométricas y porcentaje de refuerzo longitudinal (ver **Tabla 1**).

Con los incrementos graduales de las cargas, se obtuvieron diagramas de deflexiones muy suavizadas con cargas de  $0.8W_u$ . Se continuó con los incrementos de carga hasta alcanzar la carga máxima  $W_u$ , las curvas de deflexiones aumentaron en mayor escala que las anteriores, esto se debe principalmente a la pérdida de rigidez de las secciones en zonas del apoyo central, y en las zonas centrales de los claros (ver **Figura 94** y **Figura 96**).

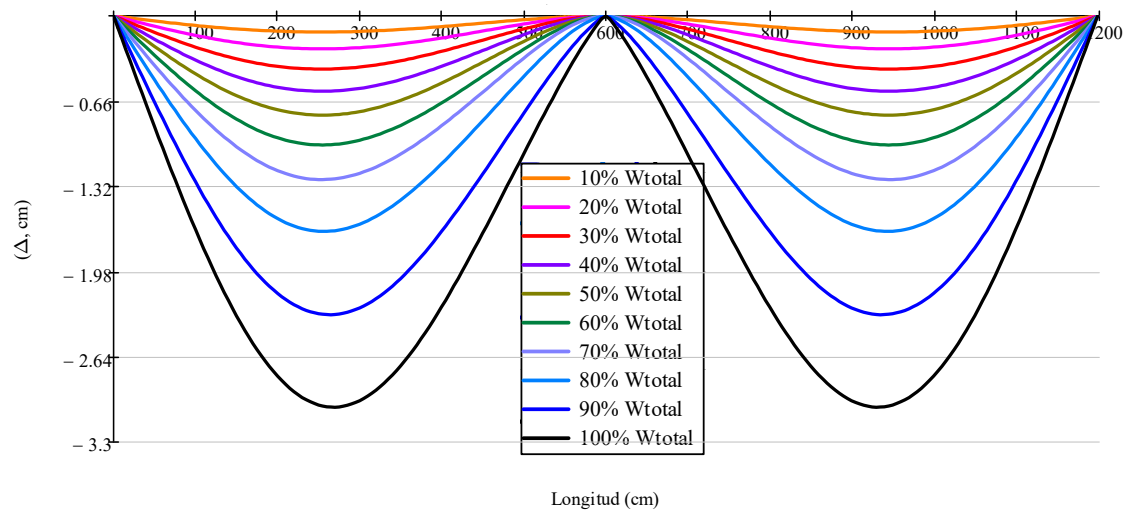
Al continuar con el incremento de la carga hasta alcanzar la carga de colapso, se obtuvo la última curva de deflexión (**Figura 95**). La configuración de deformada crece de manera considerable al alcanzar etapas de plastificación. Donde  $W_u=19.617$  kg/cm y  $W_{colapso}=19.620$  kg/cm, como se puede ver, el margen entre las dos cargas es mínima.



**Figura 94.** Diagramas de Deflexiones para V2, tipo II.

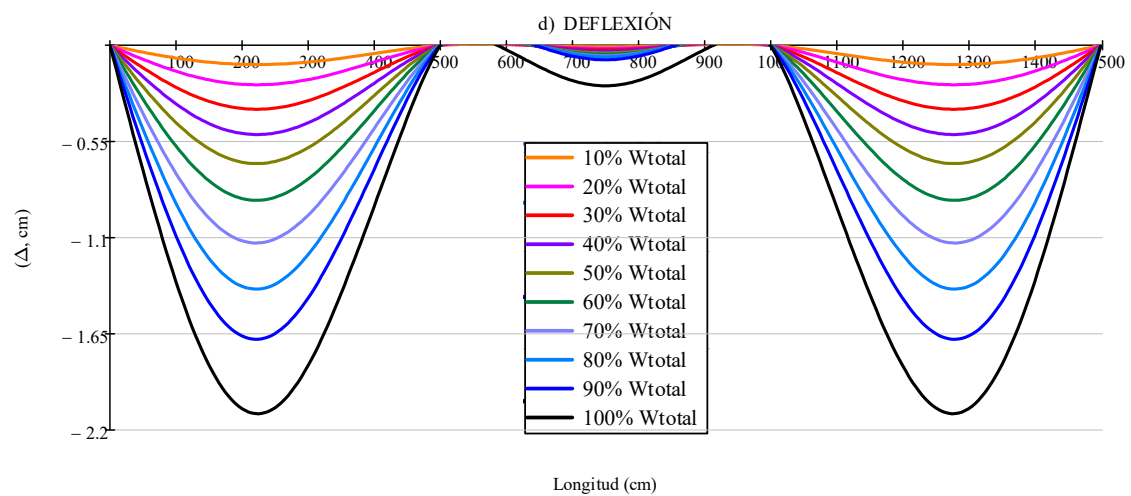


**Figura 95.** Diagramas de Deflexiones para V2, tipo II (con falla).



**Figura 96.** Diagramas de Deflexiones para V2, tipo III.

Para el caso de la viga continua de tres claros, las deflexiones máximas ocurren en las zonas centrales de los claros de borde. Sin embargo. En el claro central, las deflexiones máximas registradas son muy pequeñas en comparación con los claros de borde.



**Figura 97.** Diagramas de Deflexiones para V2, tipo IV

## **CAPÍTULO 6**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

---

Aquí se presentan las conclusiones y recomendaciones para la implementación de la metodología propuesta, cuyo objetivo principal es el cálculo de las deflexiones inmediatas en vigas de CR. Esta metodología utiliza el método de los elementos finitos (MEF) para evaluar el comportamiento no lineal de las vigas de concreto reforzado.

#### **6.1. CONCLUSIONES DE LA METODOLOGÍA.**

La metodología para calcular las deflexiones en vigas de CR, es aplicable para casos de vigas de uno o más claros. La configuración de la carga utilizada en este estudio es uniformemente distribuida. Sin embargo, es posible adaptar el algoritmo para analizar vigas con diversos tipos de cargas.

El propósito de esta investigación es, principalmente, obtener una metodología que nos ayude a evaluar y entender el comportamiento de las vigas continuas sometidas a cargas mucho mayores que las cargas de servicio.

Esta metodología resuelve el problema matemático mediante el uso del *MEF* que incluye la *RNLM*. Las principales conclusiones de esta investigación son las siguientes:

- a) La metodología permite calcular deflexiones inmediatas en vigas isostáticas e hiperestáticas.
- b) El tamaño de cada elemento finito está en función de la precisión que se desee obtener, en esta investigación se utilizaron tamaños máximos de 5 cm de longitud por cada subelemento de la viga.
- c) La metodología de esta investigación, incluye la respuesta no lineal del acero y del concreto, mediante la inclusión de la relación  $M-\phi$  obtenida con los modelos constitutivos seleccionados. Es posible adoptar cualquier modelo constitutivo de los materiales para investigar una mayor diversidad de comportamiento de las vigas.
- d) La sección transversal se mantiene constante a todo lo largo de la viga, la cantidad de refuerzo longitudinal es igual en zonas de momento positivo y negativo. Se puede modificar el algoritmo para hacer que se incluya zonas con mayor o menor porcentajes de acero para adoptar el comportamiento en zonas de Momentos máximos positivo y negativo.
- e) En las secciones transversales no se incluyen los estribos, las deformaciones por cortante son despreciados.



- f) Se desconoce la carga última ( $W_u$ ) que genera la falla en las vigas continuas. Por esta razón, se adopta la técnica del análisis PUSHOVER para determinar la  $W_u$ . Esta técnica consiste en aplicar incrementos graduales de cargas ( $\Delta W$ ) hasta alcanzar la condición de falla en la sección de la viga. Para esto, existen algunas alternativas que ayudaron a determinar la  $W_u$ .
- g) Se monitoreó el diagrama de RF de la viga, para identificar la carga que genera la reducción total de la RF en zonas específicas, en zonas de los apoyos centrales y en las zonas centrales de los claros de borde.
- h) El incremento gradual de la carga distribuida continúa hasta que en las zonas centrales de los claros de borde de la viga, se alcanzan momentos máximos iguales o cercanos al momento último obtenido en el diagrama de M- $\phi$  de la viga analizada.
- i) Una de las ventajas de utilizar el MEF con elementos tipo barra es la reducción de los grados de libertad (GL), y depende principalmente del número de elementos en que se discretiza la viga.
- j) La desventaja de esta metodología fue la elección de las funciones de forma, pero existe la posibilidad de sustituirlas por otras funciones de forma que presenten mejores características para el desarrollo de la solución matemática.

## 6.2. CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS

- a) Con respecto a los diagramas de  $RF$ , se observó el desarrollo progresivo de la plastificación distribuida desde cargas tempranas hasta llegar a la carga  $W_u$ , esto es, al ir incrementando las cargas ocurre de igual forma el incremento gradual de la pérdida de rigidez desarrollándose en la mayor parte de la viga. El fenómeno de la plastificación obtenida en esta investigación, es totalmente distinta a lo establecido en el análisis plástico clásico, ya que la plastificación del material no ocurre en puntos discretos, sino a todo lo largo de la viga.
- b) Como se mencionó anteriormente, la manera de conocer la carga  $W_u$ , fue mediante la técnica del análisis *PUSHOVER*. Se monitorean los diagramas de  $RF$ , de curvaturas y de  $MF$ , hasta alcanzar magnitudes máximas (positivo o negativo) en los apoyos intermedios y en zonas centrales.
- c) Con respecto al diagrama de  $MF$ , al incrementar la carga al 80% de  $W_u$ , se observa un corte del diagrama (“achataamiento”) en los apoyos intermedios, se debe principalmente a que es la zona donde primeramente se presenta la disminución de rigidez, y posteriormente la reducción de la  $RF$  ocurre en zonas centrales de los claros de borde cuando se alcanza la carga  $W_u$ .
- d) Al alcanzar la  $W_u$ , los diagramas de curvaturas y de  $MF$  tienden a desarrollarse similar en zonas de mayor demanda.

- e) Al superar el 80% de la  $W_u$ , el desarrollo de las magnitudes de deformaciones se incrementa en mayor escala con respecto a los estados de cargas menores a este rango. Si se incrementa una porción más de carga mayor a la carga  $W_u$ , la curva de deformación se desarrolla de manera exponencial.
- f) Los resultados obtenidos del análisis de la viga de un claro, De acuerdo a los resultados comparativos entre el análisis por el método del ACI y la metodología que proponemos, se obtuvieron resultados muy parecidos. Además, la metodología de esta investigación es capaz de resolver problemas más allá de las cargas de servicio, a diferencia del método del ACI.
- g) Finalmente, podemos concluir que la metodología propuesta en esta investigación, cumple con los objetivos planteados inicialmente.

### 6.3. RECOMENDACIONES.

- a) Como proyecto de investigación futura se recomienda estudiar diversos modelos de no linealidad de acero y concreto para cotejar la influencia en el comportamiento de plasticidad distribuida.
- b) En cuanto el algoritmo desarrollado, recomendamos trabajar con funciones de formas con el grado del polinomio mayor al 5 orden, con la finalidad de obtener con facilidad la cuarta derivada de la función de

forma, ya que la ecuación fundamental a resolver, es precisamente de cuarto orden.

- c) En esta investigación no fue posible obtener los resultados para la etapa del ablandamiento por deformación de los materiales, por tal motivo, se recomienda utilizar un método capaz de resolver la etapa de ablandamiento.

## BIBLIOGRAFÍA

---

ACI315R-04. (2004). *ACI Detailing Manual 2004*.

ACI435R-95. (1995). *Control of Deflection in Concrete Structures*. Reported by Committee 435.

ACI435R-95, R. b. (1995). *Control of Deflection in Concrete Structures*. ACI.

ASTM-C31. (2017). *Standard Practice for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field*.

ASTM-C-496. (1996). *Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens*.

ASTM-C78. (s.f.). *Método de Ensayo Normalizado para la Determinación de la Resistencia a la Flexión del Concreto*.

ASTM-E8. (2015). *Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials*.

Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: PRENTICE HALL, INC.

- Becker, E., Carey, G., & Oden, J. (1981). *Finite Elements an Introduction*. New jersey: PRENTICE HALL, INC.
- Branson, D. (1968). *Design Procedures for Computing Deflection*, *ACI Journal*.
- Branson, D. E. (1972). *Instantaneous and Time-Dependent Deflections Of Simple And Continuous Reinforced Concrete Beams*, *ACI318-71*.
- Carreira, D. (2010). *Advanced Reinforced Concrete, Class Notes*. Illinois: Class Notes.
- Carreira, D., & Chu, H. (1985). *Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression*, *ACI Journal*.
- Carreira, D., & Chu, H. (1986). Stress-Strain relationship for Reinforced Concrete in Tension. *ACI JOURNAL*(83-3), 21 - 28.
- Celigüeta Lizarza, J. (2011). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. España: UNICOPIA C.B.
- Celingüeta Lizarza, J. (2008). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. España: UNICOPIA C.B.
- Chávez, J. (2011). *Comportamiento de Concreto Reforzado*. Nuevo león: FIC-UANL.
- Committee 318, American Concrete Institute, A. (2008). *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI318-08 and ACI318-R-08)*. Farmington Hills, MI.

FEMA400 Department of Homeland Security's Federal Emergency Management Agency. (junio 2005). *Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis*.

FEMA440A Department of Homeland Security's Federal Emergency Management Agency, (FEMA440-A). (2009). *Effects of Strength and Stiffness Degradation on Seismic Response*.

Gasser, T., & Holzapfel, G. (2004). *Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM*. Australia: ELSEVIER.

Gil Espert, L., Oñate, E., & Bugeda, G. (1996). *Análisis de Sensibilidad con Comportamiento no Lineal del Material y su Aplicación en el Diseño Asistido de Estructuras*. Catalunya, Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria.

Hognestad, E. (1951). *Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members*. University of Illinois Engineering Experimental Station.

Jensen, V. (1943). *Ultimate strength of Reinforced Concrete beams as Related to the Plasty ratio of Concrete*. University of Illinois Engineering Experimental Station.

Jie-Jiang, Z., & Yang, L. (2009). *Push-Over Analysis Programming for reinforced Concrete Structure*. Word Congress on Computer Science and Information Engineering.

Kassimali, A. (2001). *Análisis Estructural*. México: Thomson Learning.

- Kripanarayanan, K., & Branson, D. (1972). *Short-Time Deflections of Beams Under Single and Repeated Load Cycles*. ACI Journal.
- Mircea, R. (Reimpresión 2006). *Finite Element Analysis, Department of Engineering Sciences in University Politehnica of Bucharest 1992*. PRINTECH.
- Mohr, S., Bairán, J., & Marín, A. (2010). *A Frame Element Model for the Analysis of reinforced concrete Structures Under Shear and Bending*. Barcelona, Spain: ELSEVIER-Engineering Structures.
- Nilson, A., Nilson, D., & Charles W., D. (2010). *Design of Concrete Structures*. New York: Mc Graw Hill.
- NMX-C-083-ONNCCE-2014. (2014). *Determinación de la resistencia a la compresión de especímenes*. Ciudad de México, Méx.: Diario Oficial de la Federación.
- NTC2004-DF. (2004). *Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto Reforzado- "3.2.1 Deflexiones en Elementos No Presforzados que trabajan en una dirección"*. México D.F.: Gaceta oficial del D.F.
- Park, R., & T., P. (1983). *Estructuras de Concreto Reforzado (ver. en español)*. México: LIMUSA.



Starossek, T., Löhning, T., & Achenk, J. (2009). *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames by a Combined Method. Electronic Journal of Structural, Hamburg University of Technology. Germany.*

Whitney, C. (Mayo 2004). *Design of Reinforced Concrete Members Under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression. Landmark Series.*

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2000). *The Finite Element Method. BUTTERWORTH-HEINEMANN.*

## GLOSARIO

---

CR:	Concreto reforzado.
EI:	Rigidez a Flexión.
$EI(\Psi)$ :	Función de la Rigidez a Flexión.
$f'_c$ :	Resistencia a compresión del concreto.
MEF:	Método del Elemento Finito.
MF:	Momento Flexionante.
RF:	Rigidez a flexión.
RNLM:	Respuesta no lineal del Material.
$W$ :	Cara uniformemente distribuida.
$W_u$ :	Carga última.
$\varepsilon$ :	Deformación unitaria
$\varphi$ :	Curvatura.
$\varphi_p$ :	Curvatura plástica.
$\Psi$ :	Función de forma.
$\Omega$ :	Subelementos tipo barra.
M- $\varphi$ :	Momento-Curvatura.
$\Delta$ :	Deflexión.
$\Delta_w$ :	Incrementos de cargas.
[F]:	Matriz de Fuerza.
[K]:	Matriz de Rigidez